Lycée de Sbeïtla ☼☼☼☼☼ **Devoir de contrôle n° 1**	Epreuve : **Mathématiques**
	Durée : 2 heures
Classe : $4^{\text{éme}}$ Maths 2	Prof : Elabidi Zahi

Exercice 1 : (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+1 & si\ x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x<0$, $1-x^2\leq f(x)\leq x^2+1$

b) En déduire que f est continue en 0

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$ En déduire $f(\left[0,+\infty\right[)$

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $g(x)=f(x)-x^2$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) En déduire que l'équation $f(x)=x^2$ admet une unique solution α dans $\left[0,+\infty\right[$

et que $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

Exercice 2 : (6points)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}}\ ,\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n<1$

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geq\dfrac{1+u_n}{2}$

b) En déduire que (u_n) croissante et qu'elle est convergente

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<1-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(1-u_n)$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}, 1-u_n\leq\dfrac{1}{2^n}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k$ et $v_n=\dfrac{S_n}{n}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n-2(1-\dfrac{1}{2^n})\leq S_n<n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 3 : (8 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-i$ associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{1+iz}{z+i}$

1) a) Quelle est l'image par l'application f du point O ?

b) Quelle est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

3) a) Vérifier que $z'=\dfrac{i(z-i)}{z+i}$

b) En déduire que $OM'=\dfrac{AM}{BM}$ et $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM'}})=(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

c) Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

d) Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et de B, montrer que son image M' par f est située sur l'axe des abscisses.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

b) Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\dfrac{1+iz}{z+i}=e^{i\theta}$ si et seulement si $z=-\cot g\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) En déduire les solutions de l'équation $(1+iz)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z+i)^3$.