

Exercice N°1 : (4 pts)

A] Dans chacune des questions suivantes, une seule réponse correcte indiquer là.

1) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

a) $\lim V_n = \frac{\pi}{2}$; b) $\lim V_n = \frac{2}{\pi}$; c) $\lim V_n = 1$

2) On considère la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par $W_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

a) $\lim W_n = 2$; b) $\lim W_n = +\infty$; c) $\lim W_n = \frac{1}{2}$

B] Soit f une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	3	7

1) Donner dans chaque cas le nombre de solutions de l'équation :

$f(x) = 0$, $f(x) = 10$,

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x^2)$

Exercice N°2 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$; $n \in \mathbb{N}$

2) a) Etudier la monotonie de la suite U

b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que : $0 < 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n)$; $n \in \mathbb{N}$

b) Déduire que : $0 < 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}$ puis retrouver la limite de la suite U

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$; $V_n = \frac{S_n}{n}$ et $W_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \leq S_n < n$; $n \in \mathbb{N}^*$

b) Déterminer alors ; $\lim V_n$ et $\lim W_n$

Exercice N°3 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1°) a - montrer que f est continue sur I

b - Montrer que pour tout x de I on a : $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{1-x}}$

2°) a - Montrer que f est strictement décroissante sur I

b - Déterminer $f(I)$ et $f([0,1])$.

3°) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une unique solution α dans $]0,1[$

4°) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de g sur J .

Exercice N°4 : (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points $A(-i)$ et $B(i)$.

Soit f l'application de $P \setminus \{A\}$ dans $P \setminus \{B\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

1°) On suppose $M \neq A$ et $M \neq B$

a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{MA}, \widehat{MB}) [2\pi]$

b) En **déduire** l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que z' est un réel non nul.

2°) Soit dans \mathbb{C} l'équation $(F) : (iz+1)^3 = (z+i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de (F) alors z est réel.

b) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{i + \operatorname{tg} \alpha}\right)$. En déduire

les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\operatorname{tg} \alpha$ soit une solution de (F) .

3°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$

a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixe respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = 2i - e^{i\theta}$

i) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera.

ii) trouver l'ensemble (Γ) décrit par M_1 et M_2 lorsque θ varie.

iii) Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin \theta)$. Déduire la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale