Lycées Mahmoud Messaadi NABEUL A S 2010-11		Profs : Chouk – Ammar – Ben rhim Devoir de Contrôle N°1	
11-11-2010	Classes : 4ème Math	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h

Exercice N°1 (3 points)

Pour chaque question, il y a exactement une proposition correcte. L'élève doit cocher la proposition vraie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2i$. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

1) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\frac{z^2 - z}{z - 2i}\right| = |\bar{z}|$ est :

☐ Δ	☐ $\Delta \cup \{O\}$	☐ $\{O\}$

2) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = 1 + \sin\theta e^{\frac{i\pi}{4}}$ avec $\theta \in [0,\pi]$ est :

☐ une droite	☐ un segment de droite	☐ un demi-cercle

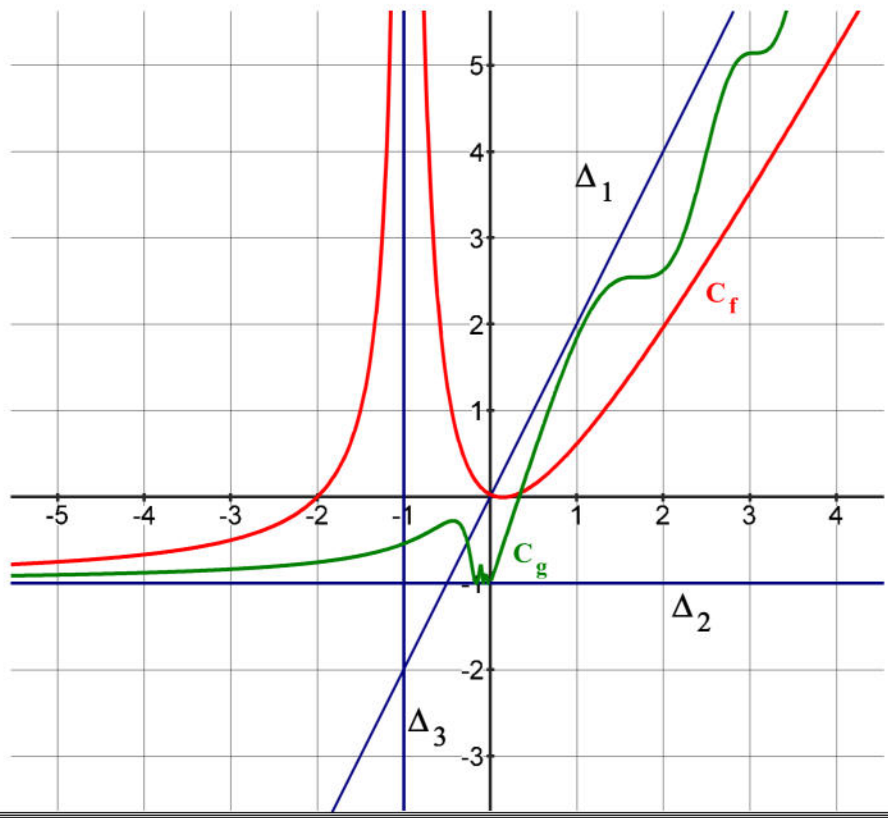
3) Soient les points $M(z)$ et $M'\left(\frac{1}{z}\right)$ avec $z \in C^*$.

☐ Les points O,M et M' sont alignés	☐ $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$	☐ M et M' sont symétrique par rapport à $(O,\vec{u})$

4) Une racine quatrième de $u = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ est :

☐ $e^{\frac{i\pi}{12}}$	☐ $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$	☐ $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{6}}$

Figure de l'exercice n°2



Annexe

A rendre avec la copie

Classe :

....

Nom et prénom :

....

....

Exercice N°2 (5,5 points)

Dans l'annexe ci-jointe ; on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$: la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ et les droites Δ_1, Δ_2 *et* Δ_3.

- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de Δ_1 au $+\infty$.
- Les droites Δ_2 *et* Δ_3 sont des asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est entre Δ_2 et $\mathscr{C}_f$ pour tout $x<-1$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est entre $\mathscr{C}_f$ et Δ_1 pour tout $x\geq 1$.

1) A l'aide d'une lecture graphique :
   a) Donner $\lim\limits_{-\infty} g$, $\lim\limits_{+\infty} g$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f\circ f(x)$ et $f\circ f(]-\infty,-1[)$.
   c) Dresser les tableaux de variation et de signe de f .
2) Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.
   a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_h$ de définition de h puis justifier la continuité de h sur $\mathscr{D}_h$.
   b) La fonction h est-elle prolongeable par continuité en (-1) ? justifier.
   c) Représenter, en justifiant, A, B et C les points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ avec $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h.
   d) Sans justifier, dresser le tableau de variation de h puis tracer $\mathscr{C}_h$.
3) Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to(-1)} f\circ f(x)-2f(x)$.

Exercice N°3 (5,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, M et M' d'affixes respectives $a=1+i$; $b=1-i$, z *et* z' tel que $z'=2-\dfrac{2}{z}$ *avec* $z\neq 0$.

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : (E) $z'=z$; donner les solutions sous forme exponentielle.
2) a) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a^{8n}+b^{8n}=2^{4n+1}$
3) On pose $z=e^{i\alpha}$ *où* $\alpha\in]0;\pi]$
   a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque $\alpha\in]0;\pi]$
   b) Montrer que $z'=4\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{-i\left(\frac{\alpha-\pi}{2}\right)}$
   c) Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, A et M' sont alignés
4) a) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{a\,;b\}$; $\dfrac{z'-b}{z'-a}=i\dfrac{z-b}{z-a}$
   b) Déduire l'ensemble des points M' lorsque M varie sur la médiatrice $[AB]$
   c) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle de diamètre $[AB]$?

Exercice N°4 (6 points)

1) On donne ci-dessous, le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{23}{27}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1,2]$.

Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$; $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x^2+1}$.

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < \alpha$

b) Montrer que (U_n) est monotone et en déduire qu'elle converge vers α

4) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} U_i = \dfrac{U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}}{n}$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $f(\alpha) - f(U_n) = \dfrac{(\alpha + U_n)(\alpha - U_n)}{\left(U_n^2+1\right)\left(\alpha^2+1\right)}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < \alpha - U_{n+1} \leq K(\alpha - U_n)$ avec $K = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < \alpha - U_n \leq K^n \alpha$

d) Montrer que $0 < K < 1$

e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 < \alpha - V_n \leq \dfrac{\alpha\left(1-K^n\right)}{n(1-k)}$; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$