Lycée IBN KHALDOUN- Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de contrôle n°1 4ème M	Durée : 2 heures 29 octobre 2009

Exercice 1: (3 points)

Pour chaque question, répondre par **Vrai** ou **Faux**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapport 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 points ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout $x < 1$, on a $g(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ alors $\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x) = +\infty$.
2. Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = -\ell$.
3. Si pour tout x réel strictement négatif, on a : $|f(x)-3| \le -\frac{1}{x}$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
4. Soit f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ dont le tableau des variations est :

x	-3		0		2		4
f(x)	1	↗	5	↘	-3	↗	1

   L'image de l'intervalle [-2, 3] par f est [-3, 5].

5. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative admet , dans un repère du plan, pour asymptote au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation y = - x + 1 alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
6. Soit la fonction f définie sur [0, 1] par f(x) = $x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour tout x de [0, 1], le réel $f\circ f(x) = x$.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \ge 3$, (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2-1} = n$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.
2. Montrer que pour tout entier n , $n \ge 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution , notée x_n , sur l'intervalle $[2,+\infty[$.
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
4. Montrer que, pour tout entier $n \ge 3$, $n-1 \le x_n \le n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis de la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$.
6. Donner une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1}.

Exercice 3: (5 points)

On considère , dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls , l'équation (E) :
$z^3 = \left(-2-2i\sqrt{3}\right)\bar{z}$.

1. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $u = -2-2i\sqrt{3}$.
2. On pose $z = re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

   a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $r^2e^{i4\alpha} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
   b) En déduire que l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}^*$, quatre solutions que l'on donnera sous forme exponentielle.
3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A , B , C et D

les images des solutions de (E) d'arguments respectifs α_A , α_B , α_C et α_D vérifiant
$\alpha_A < \alpha_B < \alpha_C < \alpha_D$.

   a) Placer les points A, B , C et D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Soit E le milieu du segment [AD]. Ecrire l'affixe z_E de E sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4: (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$(d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1+i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

1. Ecrire z_E et z_F sous forme exponentielle.
2. Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, le point M d'affixe $z = e^{2i\theta}$ appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
3. Montrer que pour tout M de (Γ), $EM \times FM = \left|e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|$.
4. a) Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, $e^{4i\theta} + 1 = 2\cos 2\theta . e^{i2\theta}$.

   b) En déduire que $EM \times FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2}$.
5. a) Montrer que pour tout réel θ de $[0, \pi[$, $\frac{1}{4} \le \frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{25}{2}$.

   b) Déterminer l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM \times FM$.

   Placer le point M_0