	Devoir de contrôle n°1 4 M_{1+2}	Durée :2H

EXERCICE N°1

Soit la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$$

1/ a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2/ Montrer que $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire que $\forall n \geq 1$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3/ Soit la suite (S_n) définie par $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

a) En remarquant que $\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$ et $\frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n}$

montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $2n - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq 2n + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE N°2

1/ On donne l'équation (E_α) : $z^3 - (1 - 2\sin\alpha) z^2 + (1 - 2\sin\alpha) z - 1 = 0$ $\left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E_α).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) . Donner les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, M_1, M_2 d'affixes respectives 1, $z_1 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$, $\bar{z}_1$.

a) Montrer que AM_1M_2 est un triangle isocèle.

b) Déterminer α pour que AM_1M_2 soit équilatéral.

3/ Soit $z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour tout $z \neq z_0$ on pose $Z = \frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0}$.

On note $A(1)$, $B(z_0)$, $M(z)$, $M'(Z)$.

a) Montrer que $Z\bar{Z} = 1$, interpréter le résultat géométriquement.

b) Montrer que $\frac{Z-1}{z-z_0}$ est imaginaire pur . En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

c) Donner une construction du point M' connaissant la position de M.