

<u>PROF</u> : Mr Mighri. A	<u>Devoir De Contrôle N°1</u>	<u>L. IBN RACHIK</u>	
<u>Durée</u> : 2 H		4 ^e Maths	<u>Date</u> : 16-11-2007

EXERCICE N°1 (5 points)

Compléter la feuille ci – jointe

EXERCICE N°2 (7 points)

1)a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $(E_\theta) : Z^2 + i(e^{i\theta} - 2)Z + e^{i\theta} - 1 = 0$; $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

b) Donner les solutions de (E_θ) sous forme trigonométrique.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) , déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $(i - i e^{i\theta})$ lorsque θ varie dans l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

3) Soient les points $A(1)$ et $B(i)$ et $f : P \setminus \{B\} \rightarrow P \setminus \{A\}$, $M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{\bar{Z} - i}{Z + i}$

a) Montrer que : si $Z \neq i$ et $|Z| = 1$ alors Z' est imaginaire pur

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux

c) Construire M' sachant que M désigne un point du cercle trigonométrique privé du point B

4) Soit α un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$

a) Montrer que : si $Z \neq i$ et $\frac{\bar{Z} - i}{Z + i} = e^{i\alpha}$ alors $Z = -\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(\bar{Z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{Z} + i)^3$

EXERCICE N°3 (8 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

Donner le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$

2) Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

3)a) Vérifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ on a : $\frac{\operatorname{tg}x}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2x}} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) Montrer par récurrence que : $u_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

c) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$; $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$

- a) Calculer v_0 et w_0
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $w_n < v_n$
 c) Etudier la monotonie de chacune des suites (v_n) et (w_n)
 d) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes vers la même limite l et que $2 - \sqrt{2} \leq l \leq 1$

FEUILLE A RENDRE

VRAI - FAUX :

- 1) Soit Z un nombre complexe : $Z^2 = 25 \Leftrightarrow Z = 5$ ou $Z = -5$
- 2) Soient Z et Z' deux nombres complexes : $|Z| = |Z'| \Leftrightarrow Z = Z'$ ou $Z = -Z'$
- 3) Soient $A(Z_A), B(Z_B)$ et $C(Z_C)$ trois points tels que : $Z_B - Z_A = -4i(Z_C - Z_A)$
 Les droites (AB) et (AC) sont parallèles
- 4) Pour tous réels θ et θ' on a : $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2 \cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)}$
- 5) Soit Z un nombre complexe non nul
 Si $Z = r e^{i\theta}$ ($r \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) alors $|Z| = r$ et $\arg(Z) \equiv \theta (2\pi)$
- 6) Si $Z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) alors $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 7) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 On a (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes
- 8) Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes
 On a (u_n) est une suite convergente
- 9) Soit (u_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N}
 Si (u_n) est croissante et majorée par 3 alors elle converge vers 3
- 10) La fonction $f: x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; $x \neq 1$ est prolongeable par continuité en 1
- 11) L'équation $x^5 + 2x - 7 = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α
- 12) Soient a et b deux réels tels que $a < b$
 Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- 13) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[2, 4]$
 Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [2, 4] \\ (f(2) - 2008) \times (f(4) - 2008) < 0 \end{cases}$ alors l'équation $f(x) = 2008$ admet au moins
 une solution dans l'intervalle $[2, 4]$

14) Soit f une fonction définie sur un domaine D

Si $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ alors la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote
oblique à la courbe de f au voisinage de $(+\infty)$

15) Soit ,dans , l'équation $(E_\theta) : Z^2 - 2Z \cos\theta + 1 + \sin\theta = 0 ; \theta \in]0, \pi [$

Si Z' et Z'' sont les solutions de (E_θ) alors $\frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z''} = \frac{2 \cos\theta}{1 + \sin\theta}$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$