| REBUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION***<br>Lycées: *Feriana*EchebbiFeriana<br>*Thelepte*Ezzouhourkasserine | **EXAMEN DU BACCALAUREAT BLANC**<br>**MAI 2016** | |
|---|---|---|
| | **Duré:3heures** | **Coefficient : 3** |
| Epreuve :**MATHEMATIQUES** | | |

## Exercice 1 (6 points)

**I-** Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$

On désigne par (C) sa représentative dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1) a-** Vérifier que pour tout $x>0$, $g'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$

**b-** Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$par $h(x)=(x-1)e^x$ .

Dresser le tableau de variations de h et déduire que $g'(x)>0$ pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$

**2) a-** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

. **b-** Dresser le tableau de variations de g.

**3)** Ecrire une équation de la tangente $(\Delta)$ à (C) au point d'abscisse 1.

**II-** On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=g(x)+\ln x$

on désigne par $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1) a-** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter les résultats .

**b-** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

**2) a-**Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ .

vérifier que $0{,}3<\alpha<0{,}4$

**b-** Comparer $g(\alpha)$ et $g(1)$ . En déduire que $\ln\alpha>1-e$ .

**3) a-**Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et $(\Gamma)$

**b-** Dans l'annexe ci-jointe on tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$la courbe représentative (C) de la fonction g . Tracer $(\Delta)$ et $(\Gamma)$ dans le même repère.

**4)** Pour $0<t<1$, calculer l'aire S(t) du domaine limité par (C), $(\Gamma)$ et les deux droites d'équations $x=t$ et $x=e$ . Trouver $\lim\limits_{t\to0} S(t)$ .

## Exercice 2 (4 points)

**1)** Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$ : $y' + 2y = 0$

**2)** On considère l'équation différentielle $(E_2)$ : $y' + 2y = e^{-2x}$

a) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = xe^{-2x}$ est une solution de $(E_2)$ .

b) Montrer que h est une solution de $(E_2)$ si et seulement si $(h - g)$ est une solution de $(E_1)$ .

c) En déduire alors toutes les solution de $(E_2)$.

d) Déterminer la solution de $(E_2)$ qui s'annule en $(-1)$.

**3)** Soit *f* la fonction définie sur IR par : $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$ et $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x).dx$ ; $\alpha \in ]-1\,;+\infty[$

Montrer que $I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha} e^{-2x}.dx - \frac{1}{2}f(\alpha)$ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$

## Exercice 3 (5points)

Une usine produit des climatiseurs. Chaque climatiseur fabriqué peut présenter deux sortesde défauts ; un défaut électrique et défaut mécanique. Pour contrôler la production l'usine effectue des tests qui conduisent aux résultats suivants :

- 72 % des climatiseurs n'ont aucun défaut.
- 10 % des climatiseurs ont un défaut électrique.
- Parmi les climatiseurs ayant un défaut électrique. 30 % ont un défaut mécanique

**1)** On prélève au hasard un climatiseur dans la production. On note les événements suivants

- E : « Le climatiseur présente un défaut électrique.»
- M : «Le climatiseur présente un défaut mécanique.»
- D : « Le climatiseur a au moins l'un des deux défaut.»

**a)** Calculer $p(E)$ ,$p(\overline{M}\cap\overline{E})$ et $p(M / E)$ .

**b)** En déduire que $p(\overline{M}/\overline{E}) = 0{,}8$ puis déterminer $p(M/\overline{E})$ .

**c)** Montrer que $p(M) = 0{,}21$ .

**2)** Une étude statistique a permet de constater que la durée de vie $\mathbf{T_1}$ (en années) d'un climatiseur qui n'a aucun défaut suit une loi exponentielle de paramètre 0,08 et que la durée de vie $\mathbf{T_2}$ (en années) d'un climatiseur qui présente au moins l'un des deux défauts suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$

**a)** Calculer la probabilité que la durée de vie d'un climatiseur qui ne présente aucundéfaut soit supérieure ou égale à 10 ans

**b)** Déterminer $\lambda$ sachant que $p(T_2 \leq 5) = 1 - \frac{1}{e}$

**c)** Soit T la durée de vie (en année ) d'un climatiseur choisi au hasard. Démontrer que laprobabilité que ce climatiseur soit encore en état de marche après N années de fonctionnement est : $p(T \geq N) = 0{,}72\, e^{-0.08.N} + 0{,}28\, e^{-0.2.N}$

**<u>Question facultatif :</u>**

**3)** On choisit au hasard cinq climatiseurs.

Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les cinq n'a aucun défaut.

**Exercice 4 (5 points)**

**<u>Tous les résultats seront arrondis à $10^{-3}$ prés</u>**

On veut étudier les records mondiaux de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin, pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution. On donne dans le tableau suivant certains records mondiaux.

| Année | 1900 | 1912 | 1921 | 1930 | 1960 | 1983 | 1991 | 1999 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année X | 0 | 12 | 21 | 30 | 60 | 83 | 91 | 99 | 109 |
| Temps en secondes t | 10,8 | 10,6 | 10,4 | 10,3 | 10,06 | 9,93 | 9,86 | 9,79 | 9,58 |

**I)** **1)** Donner une valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire entre X et t.
Déduire que l'on peut procéder à un ajustement affine par les moindres carrées de la série (X ,t) .

**2)** Donner une équation de la droite de régression de t en X .

**3)a)** Calculer le temps théorique du record mondial dans l'année 2970.

**b)** Expliquer alors pourquoi cet ajustement ne permet pas des prévisions pertinentes à long terme sur les records des futures .

**II)** Après une étude bien précise , on choisit de modéliser la situation par un autre ajustement. On effectue alors un changement de variables $Y = e^{-0.01.X}$ et $Z = \mathrm{Ln}(t)$
Les résultats sont données dans le tableau qui suit :

| $\mathbf{Y = e^{-0.01.X}}$ | 1 | 0.887 | 0,811 | 0,741 | 0,546 | 0,436 | 0,403 | 0,372 | 0,336 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{Z = Ln(t)}$ | 2,38 | 2,361 | 2,342 | 2,332 | 2,309 | 2,296 | 2,288 | 2,281 | 2,260 |

**1)** Donner une équation de la droite de régression de Z en Y par les moindres carrées.

**2)** En déduire que l'on peut modéliser une expression de t en fonction de X sous la forme suivante : $\mathbf{t = \boldsymbol{a}.e^{0,158\,e^{-0,01\,X}}}$ où $a$ est une constante que l'on déterminera.

**3)** A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2017 ?

**4)** **a)** Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie par :

$$\mathbf{f(x) = 9,207.e^{0,158e^{-0.01.x}}}$$

**b)** Que peut-on conclure a propos les records mondiaux du 100 mètres à long terme.

**BON TRAVAIL**

**Annexe à rendre avec la copie**

**Nom :** ……………………..…  **Prénom :** ……..……..……….…