

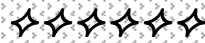
Devoir de synthèse n°3

LYCEE SBEITLA



EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SECTION : 4^{ème}



PROF : DHOUADI NEJIB & BELLILI MONGI

EXERCICE N°1

06 pts

I°) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x.e^x - 2$

1°) Dresser le tableau des variations de g

2°) a. Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une unique solution a puis que : $0,8 \leq a \leq 0,9$

b. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II°) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x + 2}$ et on désigne par ζ_f sa

courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°) a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$

c. Etudier la position relative de ζ_f et la droite Δ

2°) a. Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2.g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b. Dresser le tableau de variation de f

c. Montrer que : $f(a) = 1 - a$

3°) Tracer la courbe ζ_f et Δ (on prendra : $a \approx 0,85$)

4°) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par ζ_f , la droite Δ et les droites d'équations :

$x = -1$ et $x = 0$

a. Montrer que pour tout $x \in [-1, 0]$ on a : $\frac{1}{3}(x+1)e^x \leq \frac{(x+1)e^x}{e^x + 2} \leq \frac{e^x}{e^x + 2}$

b. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_{-1}^0 (x+1).e^x dx$

c. Montrer alors que : $\frac{1}{3e} \leq A \leq \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)$

EXERCICE N°2**05 pts**

Dans la figure suivante :

- La courbe (C) est la représentation graphique

Dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f

Solution de l'équation différentielle : $y' = ay + b$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

- On a tracé la tangente à (C) au point O.

- $f(10) = 30 - 30.e^{-1}$

On désigne par S l'aire en (u.a) de la partie du plan

hachurée et on admet que : $S = 300.e^{-1}$

1°) a. Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$

b. Déduire que : $b = 3$

2°) a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \frac{1}{a}(f'(x) - 3)$$

b. Déduire que : $S = \frac{-30.e^{-1}}{a}$

c. Montrer alors que : $a = -0,1$

3°) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = 30 - 30.e^{-0,1 \cdot x}$ (On rappelle que f est la solution de l'équation différentielle : $y' = -0,1 \cdot y + 3$).

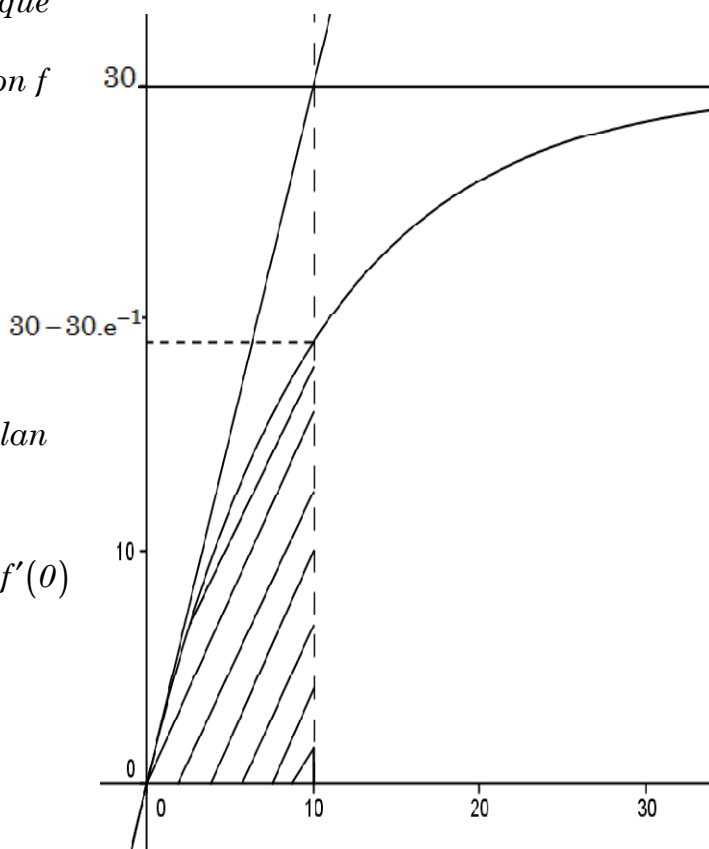
4°) On admet que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ modélise les variations de la température $\theta(t)$ (exprimée en degré Celsius) en fonction de temps t (exprimé en minutes) d'un corps placé à un temps initial $t = 0$ dans un endroit à température ambiante constante.

On a alors : $\theta(t) = 30 - 30.e^{-0,1 \cdot t}$

a. Déterminer la température du corps au bout de 20 minutes.

b. Déterminer, à 10^{-1} près, le temps t_0 à partir duquel la température dépassera 29°C .

c. Calculer : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$ puis interpréter le résultat.



EXERCICE N°3**05 pts**

Un responsable de magasin achète en grand nombre des pièces mécaniques d'un fournisseur.

- 50 % de ces pièces sont d'origines dont 2 % sont défectueuses.
- Le reste des pièces sont adaptables et dont 20 % sont défectueuses.

On prélève au hasard une pièce et considère les événements suivants :

- D : « La pièce est défectueuse »
- O : « La pièce est d'origine »

1°) a. Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et d'origine ?

b. Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et adaptable ?

c. Montrer que la probabilité p pour que la pièce prélevée soit non défectueuse est $p = 0,89$

2°) La durée de vie d'une pièce mécanique non défectueuse (exprimée en années) est une variable aléatoire continue X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Sachant que : $p(X \geq 8) = 0,3$, déterminer la valeur, arrondie à 10^{-2} près, de λ .

Par la suite on prendra : $\lambda = 0,15$.

b. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait une durée de vie inférieure à 18 mois .

c. Sachant qu'une pièce a déjà 5 années de fonctionnement, quelle la probabilité pour qu'elle ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

3°) a. Le responsable de magasin décide de commander 10 pièces étudiées qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre et ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?

Quelle est la probabilité pour qu'il avait au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?

b. Déterminer le nombre minimal n des pièces qu'il doit commander pour que la probabilité d'avoir au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans dans sa commande soit supérieure à 0,998 ?

EXERCICE N°4**04 pts**

Craignant une propagation d'une grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines consécutives. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations y	540	720	990	1340	1810	2440	3300

On pose : $z = \ln y$

1°) Recopier et compléter le tableau suivant : les résultats sont arrondis à 10^{-2} près.

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$	6,29	6,58	6,90				

2°) a. Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique (x, z) puis interpréter le résultat.

b. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .

c. Déduire que : $y = a.e^{\beta x}$ ou a et β sont deux réels à préciser.

3°) a. Donner une estimation du nombre des consultations hebdomadaire concernant cette grippe pendant la dixième semaine.

b. Déterminer la semaine a partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

