Lycée : El Amal fouchana

Prof : B. Zouhaier

Devoir de synthèse n°3

Mai 2014 — 4ème

Exercice n°1 (3points) :

*Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse*

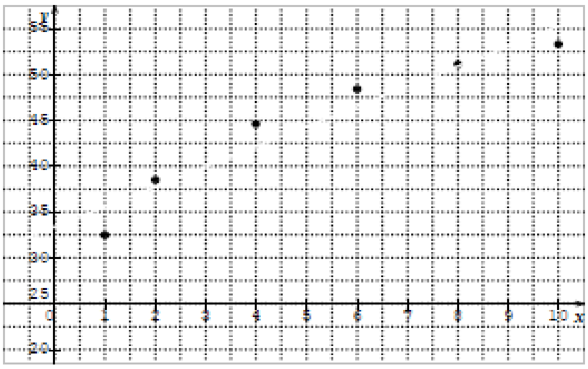
1. Si $F(x) = \int_0^{\ln x} te^t dt$ alors $F'(x) = x \ln x$ pour tout $x > 0$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2} dx = 2$
3. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$

Exercice n°2 (4points) :

Pour des raisons pratiques, la production mensuelle du groupe chimique de l'un des produits qu'il commercialise ne doit pas excéder 10 tonnes. Le groupe a relevé le coût total de production mensuelle en milles de dinars, noté y en fonction de la production x en tonnes. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

x	1	2	4	6	8	10
y	32.5	38.5	44.6	48.4	51.1	53.3

1. *On a représenté ci contre le nuage de points de la série (X , Y).*



Indiquer si ce nuage justifie la recherche d'un ajustement affine entre X et Y

2. a) Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X

   b) Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

   c) Calculer le coefficient de corrélation de X et Y et interpréter le résultat

3. On pose $z = e^{0.1y}$

1. Compléter le tableau suivant après l'avoir recopié sur votre copie:

x	1	2	4	6	8	10
z	25.79	46.99				

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.

d)Estimer le coût correspondant à une production de 7 tonnes.

Exercice n°3 (5points) :

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes :

25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- *D l'évènement « le composant est défectueux » ;*
- *F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;*
- *F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».*

1. *a)Dessiner un arbre pondéré.*
   b) Calculer p ($D \cap F_1$), puis démontrer que p(D)=0,0225 .
   c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?
   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.
2. *Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?*
3. *La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ,*
   a) Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
   b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ?
   c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice n°4 (5points) :

A/ *on considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = -e^{\frac{x}{2}}$*

1. *Soit g (x) = $-xe^{\frac{x}{2}}$, vérifier que g est une solution de (E)*
2. *Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' - \frac{1}{2}y = 0$*
3. *a)Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si (f – g) est une solution de (E_0)*
   b)En déduire les solutions de (E) , puis déterminer la solution f qui vérifie f(0) = 1

B/*Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 - x)\, e^{\frac{x}{2}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé*

1. *a)Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat*
   b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat
2. *a)Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$*

b) Dresser le tableau de variation de f

c)Tracer (C_f)

3. a)Soit ≤ 0 , calculer à l'aide d'une intégration par partie $A(\alpha)$: l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 1$

b) Calculer $\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

<u>Exercice n°5 (3points) :</u>

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

1. a)Montrer que pour tout $n \in IN$;$U_n \geq 0$

   b) Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$
2. Calculer U_0 , U_1 et U_2
3. Montrer que (U_n) est décroissante
4. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

<u>Bon Courage</u>