

SECTION :

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

DUREE : 3h

COEFFICIENT : 3

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

➤ **Exercice 1 : (3points)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. /Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, alors $f'(x)$ est égal à :

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$

b. $\frac{-\ln(5)}{5^x}$

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^x \ln 5$

2. /Soit f la solution de l'équation différentielle : $y' + 3y = 0$ telle que $f(0) = -1$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est :

a. 3

b. -3

c. 0

3. /Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,2]. Alors on a :

a. $P(x=0,5) = 0,25$

b. $p(0,25 \leq X \leq 0,8) = 0,3$

c. $p((0,2 \leq X \leq 0,7)/(X \geq 4)) = \frac{3}{16}$

4. /Si Y est une variable aléatoire définie sur un ensemble fini \mathcal{E} prenant les valeurs -1 et 3

et tel que son espérance $E(Y) = 0$, alors $p(Y = -1)$ est égal à :

a. 0,25

b. 0,5

c. 0,75

➤ **Exercice 2 : (4points)**

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i en milligrammes, présente dans le sang à un instant t_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toute les deux heures. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t_i	0	2	4	6	8
q_i	9,9	7,5	5,5	3,9	3

1. /a. Construire le nuage des points $M_i(t_i ; q_i)$ correspondant à cette série
- b. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point .
- c. Calculer le coefficient de corrélation de cette série. Interpréter ce résultat.
- d. Déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés.(coefficients arrondis à 10^{-2} pres)
- e. En utilisant cet ajustement, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? qu'en pensez-vous de ce résultat ?

2. /On pose $y = \ln(q)$

- a. compléter le tableau suivant et calculer le coefficient de corrélation r' de la série (t,y)

t_i	0	2	4	6	8
$y_i = \ln(q_i)$					

- b. On considère qu'une équation de la droite d'ajustement affine de y en t est : $y = -0,15t + 2,30$
Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue de cet ajustement est donnée par : $q = a.e^{bt}$ ou a et b sont deux réels que l'on déterminera.
- c. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures , quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ?

➤ **Exercice 3 : (5points)**

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; on constate que chaque article produit par cette entreprise pouvait présenter deux types de défaut :

- Un défaut D1 avec une probabilité égale à 0,03
- Un défaut D2 avec une probabilité égale à 0,02

Les deux défauts sont indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts. Soit l'évènement D : « un article est défectueux ».

1- Montrer que $p(D) = 0,0494$.

2- Un commerçant reçoit un lot de 25 articles de cette entreprise.

- a. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait exactement 2 articles défectueux dans ce lot.
- b. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au moins 1 article défectueux dans ce lot.
- c. Déterminer le nombre moyen d'article défectueux dans ce lot.

3- La durée de vie en jours de chaque article fabriqué par l'entreprise est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0007$.

- a. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours
- b. Calculer la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie égale à 850 jours.
- c. Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 1000 jours ?

➤ **Exercice 4 :**

1./Le tableau de variation ci-dessous est celui de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	$-\infty$

Préciser le signe de $g(x)$, pour tout réel x .

2./Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- a. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- c. Dresser le tableau de variation de f .
- d. Tracer (C)

3./Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_0^{\ln x} f(t) dt$

- a. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.
- b. Calculer $F(1)$ et en déduire que $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$
- c. Vérifier que pour tout réel $t > 0$; $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$
- d. Montrer alors, en utilisant une intégration par parties que $F(x) = 2\ln 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$
- e. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Bonne Chance et Bonne Révision