Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°3

Classe : 4ème

Mai 2014

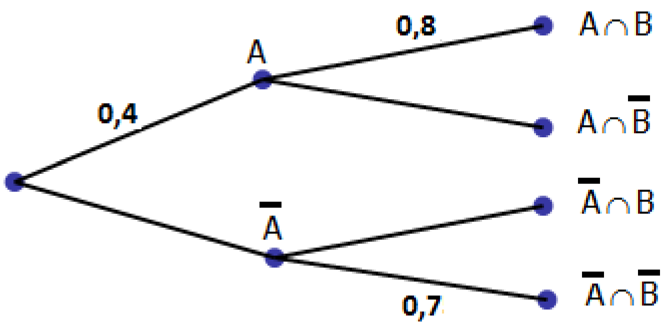
Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (3points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question, la lettre correspondante à la réponse choisie et une justification de cette réponse.

1) On considère l'arbre de probabilité ci-contre.



La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à :

a) 0,64 b) 0,8 c) 0,32

2) On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'integrale : $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$.

Une integration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

Quelle est cette relation ?

a) $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} + \frac{n+1}{2} I_n$ b) $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$ c) $I_{n+1} = 2e^2 - 2(n+1)I_n$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(x-1)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$ b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Exercice 2 (4,5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

On donne le plan P d'équation cartesienne $y + z + 1 = 0$ et l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2) Montrer que $S \cap P$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Vérifier que le point $A(2,1,0)$ appartient à la sphère S.

b) Déterminer une équation cartesienne du plan Q tangent à S en A.

4) a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$.

Exercice 3 (3,5 points)

Dans un lot de pièces de monnaie 30% sont des pièces de un dinar dont 5% sont des fausses monnaies et 70% sont des pièces de cinq dinars dont 2% sont des fausses monnaies.

1) On prend une pièce au hasard dans ce lot et on considère les événements suivants :

F : "La pièce est fausse."

U : "La pièce est de un dinar."

C : "La pièce est de cinq dinars."

a) Décrire la répartition des pièces de monnaie à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Montrer que $p(F) = 0,029$.

c) Déterminer $p(C/F)$.

2) On décide de contrôler un lot de 1000 pièces de cinq dinars.

On suppose que le processus de contrôle est assimilée à des tirages avec remise

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces fausses dans ce lot.

a) Définir la loi de probabilité de X.

b) Quel est, en moyenne, le nombre de pièces fausses?

Exercice 4 (3 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2\sin x$.

1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = a\cos x + b\sin x$ où a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b pour lesquels φ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

3) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est une solution de (E').

4) Déduire alors les solutions g de l'équation différentielle (E).

Exercice 5 (6 points)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

On note $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) *Déterminer les limites de* f *en* $-\infty$ *et* $+\infty$ *et interpréter les résultats obtenus.*

2) a) *Montrer que pour tout réel* x, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$.

b) *Drésser le tableau de variation de* f.

3) *Montrer que le point* $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie pour la courbe* $\mathscr{C}$.

4) a) *Donner une équation de la tangente* T *à la courbe* $\mathscr{C}$ *au point d'abscisse* 0.

b) *Montrer que pour tout réel* x, $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

c) *Soit* φ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x + 1) - f(x)$.

Montrer que φ *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *et déduire que* $f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x + 1)$ *pour tout* $x \geq 0$.

5) *Tracer* $\mathscr{C}$ *et* T.

6) *Soit* α *un réel strictement positif. On note* $A(\alpha)$ *l'aire de la région limitée par la courbe* $\mathscr{C}$ *et les droites d'équations* $y = 1$, $x = 0$ *et* $x = \alpha$.

a) *Montrer que* $A(\alpha) = -\dfrac{1}{2} \ln\left(1 + e^{-2\alpha}\right) + \dfrac{1}{2} \ln 2$.

b) *Déterminer* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$ *et interpréter graphiquement le résultat trouvé.*

7) a) *Montrer que* f *réalise est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle* J *que l'on précisera.*

b) *Déterminer* $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

c) *Tracer la courbe représentative* $\mathscr{C}'$ *de la fonction* f^{-1} *dans le même repère que* $\mathscr{C}$.

Correction du devoir de synthèse n°3 4scExp

Exercice 1 (3points)

$\boxed{1)\ a)}\ p(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A)p(B/A)}{p(A)p(B/A)+p(\overline{A})p(B/\overline{A})} = \dfrac{0,4\times 0,8}{0,4\times 0,8+0,6\times 0,3} = 0,64$

$\boxed{2)\ b)}$ On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{2x} \Leftarrow v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I_{n+1} = \left[\dfrac{1}{2}e^{2x}x^{n+1}\right]_0^1 - \dfrac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{2x}dx$

Donc $I_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}I_n$

$\boxed{3)\ c)}\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(2(x-1)-1\right)}{\ln(x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)\left(2-\dfrac{1}{x-1}\right)}{\ln(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)+\ln\left(2-\dfrac{1}{x-1}\right)}{\ln(x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(2-\dfrac{1}{x-1}\right)}{\ln(x-1)} = 1$

Exercice 2 (4,5 points)

$1)\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z+1)^2 - 1 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow$ S est la sphère de centre $I(1,2,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

$2)\ d = d(I,P) = \dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow S\cap P$ est un cercle de rayon $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$

Soit $H(x,y,z)$ son centre. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de P

H est le projeté orthogonal de I sur le plan $P \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \lambda\vec{n}$ et $H\in P$.

$\overrightarrow{IH} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-2 = \lambda \\ z+1 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$

En plus $H\in P \Leftrightarrow y+z+1 = 0$

$\Leftrightarrow 2+\lambda\cancel{-1}+\lambda\cancel{+1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Donc $\boxed{H(1,1,-2)}$

$3)\ a)\ (2-1)^2 + (1-2)^2 + (0+1)^2 = 1+1+1 = 3 \Rightarrow A\in S.$

b) Q tangent à S en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}$ vecteur normal à Q et $A\in Q$

$M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow (x-2)-(y-1)+z = 0 \Leftrightarrow x-y+z-1 = 0$

$\boxed{Q : x-y+z-1 = 0}$

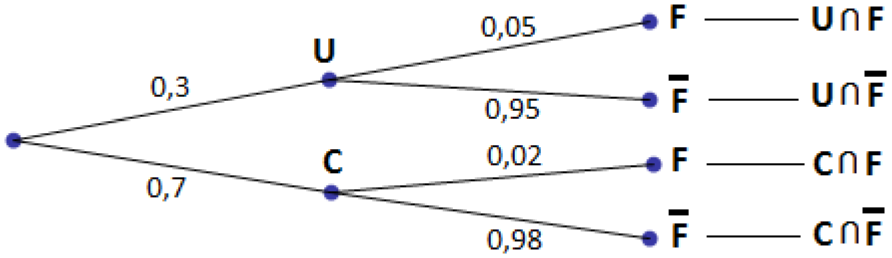
$4)\ a)\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -1+1 = 0 \Rightarrow$ P et Q sont orthogonaux.

$$b)\ P \cap Q = \Delta \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = -1 - z = -1 - \lambda \\ x = 1 + y - z = 1 - 1 - \lambda - \lambda = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\Delta : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 - \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Exercice 3 (3,5 points)

1) a)



b) D'après la formule des probabilité totales

$$p(F) = p(U \cap F) + p(C \cap F) = p(U)\,p(F/U) + p(C)\,p(F/C)$$

$$= 0,3 \times 0,05 \quad + 0,7 \times 0,02 = \boxed{0,029}$$

$$c)\ p(C/F) = \frac{p(C \cap F)}{p(F)} = \frac{p(C)\,p(F/C)}{p(F)} = \frac{0,7 \times 0,02}{0,029} \simeq 0,483$$

2) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,029$

a) $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 1000\}$, $p(X = k) = C_{1000}^{k} (0,029)^k (0,971)^{1000-k}$

b) $E(X) = np = 1000 \times 0,029 = 29$

Exercice 4 (3 points)

1) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

$\varphi'(x) + \varphi(x) = -a \sin x + b \cos x + a \cos x + b \sin x = (b - a) \sin x + (a + b) \cos x$

φ est une solution de (E) ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = 2 \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$

Ce qui donne $a = -1$ et $b = 1$ donc $\varphi(x) = -\cos x + \sin x$.

2) Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$

3) g solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) + g(x) = 2 \sin x = \varphi'(x) + \varphi(x)$

ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ (g - \varphi)'(x) + (g - \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow g - \varphi$ est une solution de (E')

4) g solution de $(E) \Leftrightarrow g - \varphi$ est une solution de $(E') \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (g - \varphi)(x) = ke^{-x}$

Donc pour tout réel x, $\boxed{g(x) = \varphi(x) + ke^{-x} = -\cos x + \sin x + ke^{-x} \text{ où } k \in \mathbb{R}}$.

Exercice 5 (6 points)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{0}{1} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}e^{2x}}{e^{-2x}(1+e^{2x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-2x}+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \text{la droite d'équation } y = 0 \text{ est une asymptote à } \mathscr{C} \text{ au voisinage de } -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est une asymptote à } \mathscr{C} \text{ au voisinage de } +\infty\end{array}\right.$$

2) a) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(1+e^{2x}) - 2e^{2x}e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

b)

b) x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}e^{-2x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \dfrac{1}{e^{2x}+1} = \dfrac{(1+e^{2x}) - e^{2x}}{e^{2x}+1} = 1 - \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1 - f(x)$.

Donc $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

4) a) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{T : y = \dfrac{1}{2}(x+1)}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4e^{2x} - 1 - 2e^{2x} - e^{4x}}{2(1+e^{2x})^2} = \dfrac{-1 + 2e^{2x} - e^{4x}}{2(1+e^{2x})^2}$

$$= -\dfrac{1 - 2e^{2x} + e^{4x}}{2(1+e^{2x})^2} = -\dfrac{(1-e^{2x})^2}{2(1+e^{2x})^2} \leq 0.$$

Donc pour tout réel x, $\boxed{f'(x) \leq \dfrac{1}{2}}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{2} - f'(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x+1) - f(x) \geq 0$.

D'où pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$ (La courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de T sur $[0,+\infty[$).

5) Voir figure.

6) a) $A(\alpha) = \int_0^\alpha (1 - f(x))dx = \int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx = \left[x - \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right]_0^\alpha$

$$= \alpha - \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2\alpha}) + \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}\left[2\alpha - \ln\left(e^{2\alpha}(e^{-2\alpha}+1)\right)\right] + \dfrac{1}{2}\ln 2$$

$$= \dfrac{1}{2}\left[2\alpha - \ln(e^{2\alpha}) - \ln\left(e^{-2\alpha}+1\right)\right] + \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}\left[\cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha} - \ln\left(e^{-2\alpha}+1\right)\right] + \dfrac{1}{2}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2\alpha}+1\right)+\frac{1}{2}\ln 2$$

b) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \frac{1}{2}\ln 2$ car $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-2\alpha} = 0.$

Interprétation : L'aire de la region limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations

$y = 1$ et $x = 0$ est égale à $\frac{1}{2}\ln 2$ unité d'aire

7) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $J = f(\mathbb{R}) = \left]0,1\right[$.

b) Soient $x \in \left]0,1\right[$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow e^{2y} = x + xe^{2y} \Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) == \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}.$$

c)