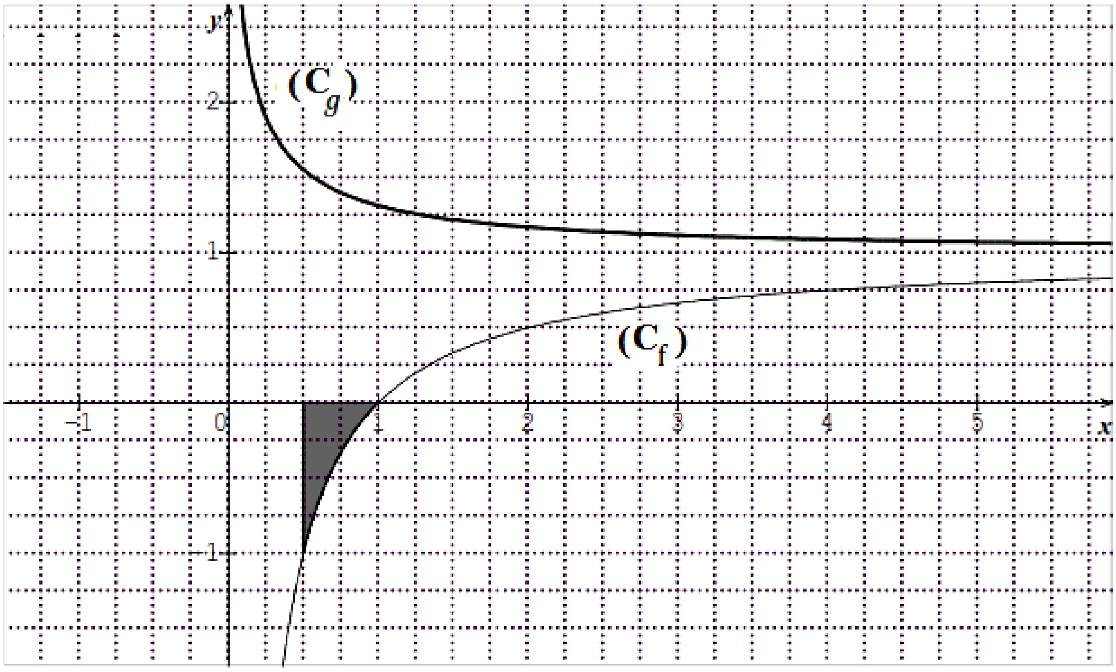
DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3
MATHEMATIQUES

Prof : Med Khairedine

Exercice 1 :

On donne dans la figure suivante les courbes représentatives , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, des deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$



Pour chacune des propositions suivantes **, répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :**

1 L'aire de la partie hachurée est $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

2 il existe un réel $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que $g'(c) = 2\ln\left(\frac{e+1}{e+2}\right)$

3 Les deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f(n)$ et $V_n = g(n)$, sont adjacentes .

4 On note $\mathbf{C} = \{M(x,y) \text{tels que : } 1 \le x \le 2 \text{ et } y = f(x)\}$ l'arc de la courbe de f sur $[1, 2]$.
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc **C** autour de $(O,\vec{i})$,est :

$$\pi\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)$$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) $9y'' + \pi^2 y = 0$
2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un plan muni d'un repère orthonormé, passe par le point $P\left(1,-\sqrt{2}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer f.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2,-1]$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln(x))^2$

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e,+\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

b. Montre que pour tout $x\in[0,+\infty[$ $g^{-1}(x) = e^{1+\sqrt{x}}$

3) **Dans le document 1 page 4 on a représenté la courbe** (C) **de f**

Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^e (1-\ln(t))^n dt$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par partie montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

c. On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectifs 1 et e.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l' arc $\widehat{AB}$ de la courbe (C) autour de l'axe $(0,\vec{i})$. Calculer V.

Exercice 4 :

Un quincaillier achète des ampoules à deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 70 % au premier fournisseur, 30 % au deuxième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 97 % des ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 95 % des ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note
S l'événement « l'ampoule est défectueuse »,
F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,
F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur »

a. Calculer $P(S/F_1)$, $P(S\cap F_1)$ et $P(S)$.

b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier fournisseur ?

2) On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité qu'une ampoule au plus soit défectueuse.

3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée X, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2.10^{-5}$.

a. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures

b. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure moins de 50 000 heures.

Exercice 5 :

Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation des ménages sur les dernières années. Le rang $x_1 = 1$ est donné pour l'année **2009**. La consommation est exprimée en milliers de dinars.

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Consommation en milliers de dinars y_i	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points Pi $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1cm comme unité en abscisses et 1cm pour 10 000 Dinars en ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.
3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12{,}5x + b$ qui passe par le point G.
   a) Déterminer la valeur de b.
   b) Tracer la droite D dans le repère précédent.
4. Déterminer, à l'aide de l'ajustement précédent, la consommation estimée des ménages de cette ville en **2016**

5. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble alors plus adapté.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième.

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$	3,35	...	...	...	...

   b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice on donnera les arrondis des coefficients à 10^{-2}.

   c) En déduire y en fonction de x

   d) Estimer alors à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en **2016 et Conclure .**

Nom et prénom : ....