Lycée TheLepTe

Mai 2012

CorreCtion du devoir de synthèse n°3

Niveau : 4 ème

Epreuve : Mathématiques

Prof : Mhamdi Abderrazek

EXERCICE N°1 :

1).a). $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}$ *=2.La droite d'équation y=2 est une asymptote à* ***(C)*** *au voisinage de +∞.*

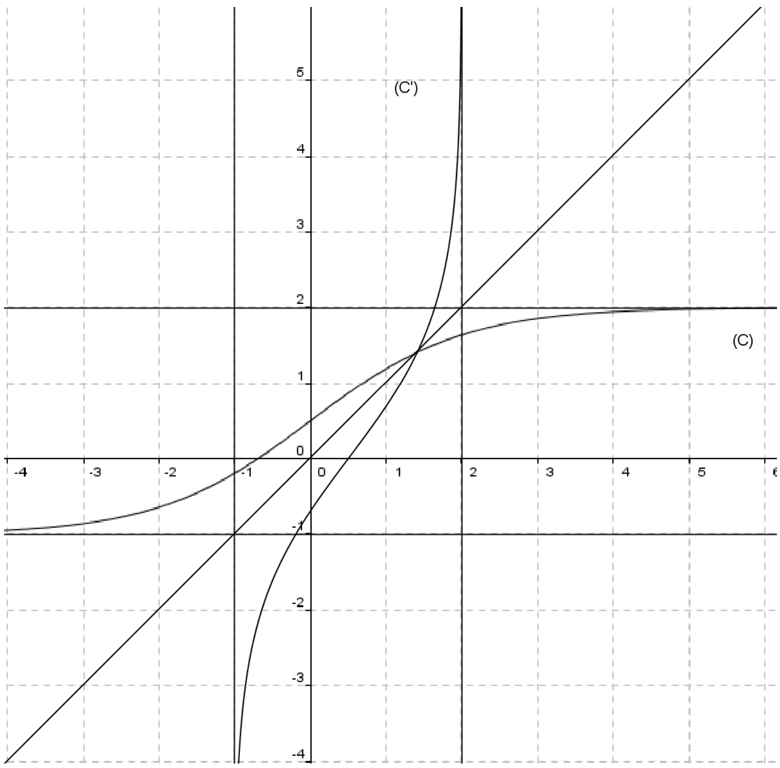
. $\lim_{-\infty} f = \frac{-1}{1}$*=-1 .La droite d'équation y=-1 est une asymptote à* ***(C)*** *au voisinage de -∞.*

b). *f'(x)=* $\frac{2e^x(e^x+1)-(2e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2} > 0.$

X	-∞		+∞
f'(x)		+	
f	-1	↗	2

2).a). *f(x)=0 signifie* $2e^x-1=0$ *signifie* $e^x=\frac{1}{2}$ *signifie x=ln* $(\frac{1}{2})$ *= - ln (2).*

b).



3).a).On a f est continue et strictement croissante sur IR donc f est une bijection de IR sur f(IR) =]-1 ;2[= I.

b).(C')=S_D(C) où D est la droite d'équation y=x.

4).a). $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in]-1\,;2[\end{cases}$ signifie**).** $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in IR \end{cases}$

f(y)=x signifie $\frac{2e^y-1}{e^y+1}$ =x signifie 2e^y-1=xe^y+x signifie e^y=$\frac{x+1}{2-x}$ signifie y=ln ($\frac{x+1}{2-x}$)

d' où $f^{-1}(x)$= ln ($\frac{x+1}{2-x}$) ∀ x ∈]-1 ;2[

b). J=$\int_{0.5}^{1} ln\ (\frac{x+1}{2-x})\ dx$ =$\int_{0.5}^{1} f^{-1}(x)\ dx$ est l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0.5 et x=1

Par raison de symétrie par rapport à la droite D :y=x on a J est l'aire du rectangle de dimensions ln(2) et 1 privée de l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0et x=ln (2)

d'où J =(1xln (2))- $\int_{0}^{\ln(2)} f(x)\ dx$ =ln(2)- $\int_{0}^{\ln 2} \left(3\frac{e^x}{e^x+1} - 1\right) dx$

=ln2-$[3\ln(e^x+1) - x]_0^{ln2}$ =5 ln(2) – 3 ln(3)=ln (32)-ln (27) = ln($\frac{32}{27}$) u.a.

EXERCICE N°2 :

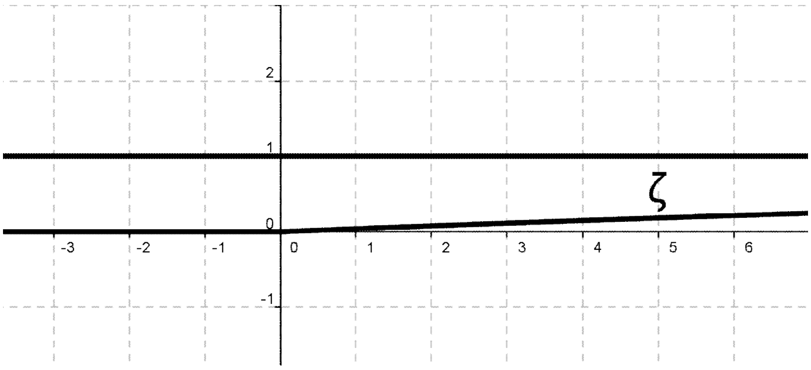
1).a).p (X=10) = 0.

b). p(5≤ $X \leq 12$) = $e^{-5x0.04}$-$e^{-12x0.04}$ =$e^{-0.2}$-$e^{-0.48}$.

c). p(X≥15) =$e^{-15x0.04}$=$e^{-0.6}$.

2).p((X≤ 15) / (X≥10)) =$\frac{p((X\leq15)\cap(X\geq10))}{p(X\geq10)}$ =$\frac{p(10\leq X\leq15)}{p(X\geq10)}$ =$\frac{e^{-0.4}-e^{-0.6}}{e^{-0.4}}$.

3).F(x)=$\begin{cases} 0\ si\ x < 0 \\ p(0 \leq X \leq x) si\ x \geq 0 \end{cases}$ signifie F(x)=$\begin{cases} 0\ si\ x < 0 \\ 1 - e^{-0.04x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$



EXERCICE N°3:

1).a).*Si* ***(C)*** *est la courbe de f ' alors f '(x) ≥0 donc f est croissante sur IR ce qui est absurde d'où* ***(C)****est la courbe de f et* ***(C')*** *est la courbe de f '.*

b).*L''aire du domaine du plan limité par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0 et x= 4 est* $\int_0^4 f'(x)dx$ *= f(4) – f(0)=3,925 u.a.*

2).a). $\lim_{+\infty} f = +\infty$; $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

b).i).*f(x) = ln* $(e^x(1-\frac{x}{e^x}))$*=ln*(e^x)*+ ln* $((1-\frac{x}{e^x}))$*=x+ ln* $((1-\frac{x}{e^x}))$*.*

ii). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln((1-\frac{x}{e^x}))=0$ *signifie Δ :y=x est une asymptote à* ***(C)*** *au voisinage de +∞.*

c).$\forall x \in [0; +\infty[$ *on a* $1-\frac{x}{e^x} \leq 1$ *signifie ln* $((1-\frac{x}{e^x})) \leq \ln(1)$ *signifie*

f(x)-x≤ 0 d'où ***(C)*** *est en dessous de Δ sur* $[0; +\infty[$.

3).a).*pour n=0 on a* $u_0=2>0$ *(vrai)*

.Supposons que $u_n > 0$ *et montrons que* $u_{n+1} > 0$

On a $u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $u_n > 0$*alors* $u_{n+1} > 0$*(car f(x)> 0*$\forall x > 0$*)*

Conclusion : $u_n > 0 \; \forall \; n>0$*.*

b).*On a f(x)-x< 0* $\forall x > 0$ *et* $u_n > 0$ *donc* $f(u_n) - u_n < 0$

Signifie $u_{n+1} < u_n$ d'où (u_n) est décroissante.

c).*voir annexe.*

d). *(u_n) est convergente vers 0.*

EXERCICE N°4:

1). *y'-2y=0 signifie y'=2y signifie y=k e^{2x} (k∈IR)*

2).*g(x)=a x+b signifie g'(x)=a*

g est une solution de (E) signifie g'(x) – 2 g(x) = 4x + 12 signifie a -2(a x+b)=4x+12

signifie -2ax+a-2b =4x+12 signifie -2a=4 et a-2b=12 signifie a=-2 et b=-7 d'où . . g(x)=-2x-7.

3).a).*f est une solution de (E) signifie f'(x)-2f(x)=4x+12=g'(x)-2g(x)*

Signifie (f-g)'-2(f-g)=0 signifie (f-g) est une solution de (E_0)

b).f *est une solution de (E) signifie(f-g) est une solution de (E_0) signifie f(x)-g(x)= k e^{2x} (k∈IR) signifie f(x)=g(x)+k e^{2x} (k∈IR) signifie f(x)=-2x-7+ k e^{2x}.*

EXERCICE N°5:

1).a).

X	1	2	3	4	5	6
Z	0	1 ,79	3,40	4,39	5,14	5,70

b). $\overline{X}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$=3,5. $\overline{Z}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} z_i \simeq$3,4

c). *r=* $\frac{cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} \simeq$ *0,98*

d). *D :Z=a X+b avec a =* $\frac{cov(X,Z)}{v(X)} \simeq$ *1,13 et b =* $\overline{Z}$ *- a* $\overline{X} \simeq$ *-0,55*

e). *On a Z = 1,13 X -0,55 signifie ln (Y) = 1,13 X -0,55 signifie*

Y = $e^{1,13\,X\,-0,55}$ =$e^{1,13\,X}$. $e^{\,-0,55}$ *or ln(3,1) ≃1,13 et* $e^{\,-0,55}$ *≃0,58*

d'où Y≃0,58. $e^{X ln(3,1)}$ *≃0,58.* $e^{ln(3,1)^{X}}$ *≃0,58.* $(3,1)^{X}$

2).*X≥10 alors Y≥0,58.* $(3,1)^{10}$ *donc ce capital dépasse 47538440dinars*

BON TRAVAIL