

<i>Lycée Ibn Sina Mahdia</i>	<i>Discipline : Mathématiques</i>	<i>Prof: GHAZI SFAXI</i>	
<i>Date :13/4/2019</i>	<i>Devoir de contrôle N°3</i>	<i>Classe:4^{ème}</i>	<i>Durée:2h</i>

Exercice N°1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x} e^{-x}$.

(C_f) désigne la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite de -1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ Dresser le tableau de variation de f .

4/a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) Tracer (C_f) sur le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5/a) Montrer que pour tout réel x , $1+x \leq e^x$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

6/ Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$.

a) Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

b) Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a : $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

7/ Soit $(C) = \{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x), -1 \leq x \leq 1\}$. Calculer le volume du solide S obtenu par rotation de (C) autour de l'axe des abscisses.

Exercice N°2 (8 points)

A/1/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .

b) Montrer que f est impaire.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2/a) Montrer que $\forall x > 0, \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}$.

b) Déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3/a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Tracer T et (C_f) .

4/a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Prouver que pour tout x réel de J , $f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$.

B/ On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx \\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+4x^2}} dx ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1/ Montrer que $u_0 = \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$.

2/a) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3/a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)\sqrt{5}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice N°3 (5 points)

On soumet, à la naissance, une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique **A**.

La probabilité qu'un enfant ayant le caractère **A** ait un test positif est 0,99.

La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère **A** ait un test négatif est 0,98.

1/ On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1000 était porteur du caractère **A**.

a) Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.

b) Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère **A**.

Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

2/ On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère **A**.

Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère **A**.

Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

3/ On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité p d'être porteur du caractère **A**.

a) Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.

b) Déterminer, en fonction de p , la probabilité $V(p)$ qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère **A**.

c) Représenter $V(p)$ en fonction de p .

d) On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère **A** est supérieure à 0,95 (Voisine de 1).

A partir de quelle valeur de p le test est-il fiable ?