Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Classe : 4 ème
Date : 15 / 04 / 2019	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (6 pts)

On considère plusieurs sacs S_1, S_2, ... S_n tels que :

- Le premier sac S_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
- Chacun des sacs S_2, S_3, ... S_n contient deux boules blanches et deux boules noires.

➢ On tire au hasard une boule de S_1.

➢ On place la boule tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une boule de S_2.

➢ On place la boule tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une boule de S_3.

➢ etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n l'événement : « la boule tirée de S_n est blanche ».

Et on note p_n la probabilité de l'événement B_n, ainsi $p_n = p(B_n)$.

1) $a/$ Calculer $p_1 = p(B_1)$, $p(B_2 / B_1)$ et $p\left(B_2 / \overline{B_1}\right)$.

   $b/$ Calculer $p_2 = p(B_2)$.

2) A l'aide d'un arbre pondéré, montrer que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{2}{5}$.

3) On pose pour tout $n \geq 1$, $q_n = p_n - \frac{1}{2}$.

   $a/$ Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.

   $b/$ Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.

   $c/$ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

4) Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,4999 \leq p_n \leq 0,5$?

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{eU_n} \quad \text{pout tout } n \in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Exprimer U_1 et U_2 sous forme d'une puissance de e.

   $b/$ Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $1 \leq U_n \leq e$.

   $c/$ Montrer que la suite U est croissante.

   $d/$ En déduire que U est convergente vers e.

2) Soit V la suite définie sur IN par : $V_n = 1 - \ln(U_n)$.

$a/$ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$b/$ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n, puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) On pose, pour tout $n \in IN^*$, $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(U_k)$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots\ldots \times U_{n-1}$.

$a/$ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $W_n = n - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$b/$ En déduire l'expression de T_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{T_n}$.

Exercice n°3 : *(8 pts)*

Dans l'annexe ci-jointe ***page 3***, on a représenté, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur IR par : $f(x) = \left(a + b\mathrm{e}^{-x}\right)^2$, où a et b sont deux réels positifs.

On admet que :

- La droite $D : y = 1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
- T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point $I\left(\ln 2, \frac{9}{4}\right)$ et de coefficient directeur $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

1) $a/$ Déterminer $f(0)$, $f'(\ln 2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$b/$ Ecrire une équation de T.

$c/$ Calculer a et b.

2) Dans la suite de l'exercice, on admet que : $f(x) = \left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)^2$.

$a/$ Dresser le tableau de variations de f.

$b/$ Montrer que f réalise une bijection de IR sur $]1, +\infty[$.

$c/$ Montrer que, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f^{-1}(x) = -\ln\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

$d/$ Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la feuille annexe.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimer en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln 2$.

$a/$ Développer $f(x)$ puis déterminer une primitive F de f sur IR.

$b/$ Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{11}{8} + \ln 2$.

$c/$ En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{9}{4}}^{4} \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) dx$.

Devoir de contrôle n°3 (15 / 04 / 2019)

Nom et prénom : ……………………………………………….................   Classe : 4 ème