Epreuve Mathématiques Lycée sbeitla

DEVOIR DU CONTROLE N°3

4ème

Professeur Belliti Mongi 09-03-2018

EXERCICE N°1 **09 pts**

I°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ et $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

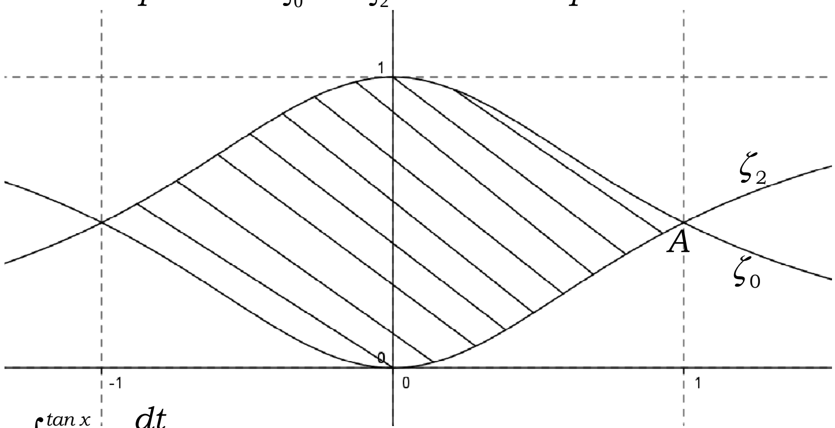
a- Etudier la monotonie de la suite (I_n)

b- Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

c- Déduire que (I_n) converge vers une limite que l'on précisera.

II°) Soit f_0 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

dont on a tracé les courbes représentatives respectives ζ_0 et ζ_2 dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

1°) a- Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

b- Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $F(x) = x$

c- Déduire que : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

d- Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

e- Déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

f- Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes ζ_0 et ζ_2

2°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer le volume $\mathcal{V}$ de solide de révolution obtenu par la rotation de l'arc $\widehat{OA} = \{M(x,y)$ tel que $y = f_2(x)$ et $0 \le x \le 1\}$ de ζ_2 autour de l'axe des abscisses

EXERCICE N°2 **06 pts** *L'espace est munie d'un repère orthonormé* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1°) *Soit S l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *vérifiant :* $x^2+y^2+z^2-4x+4y-1=0$

Montrer que S est la sphère de centre $I(2,-2,0)$ *et de rayon* $R=3$

2°) *On considère le plan P dont une équation cartésienne est :* $2x-2y+z-5=0$

__a__- Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par le point $J(0,3,-1)$

__b__- Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle ζ *dont déterminera les coordonnés du centre H et le rayon r.*

__c__- Déterminer : $Q \cap S$

3°) *On considère les points :* $A(-1,0,1)$; $B(1,2,1)$ *et* $C(0,2,3)$

__a__- Montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ *de l'espace on a :*

$$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM} = 2(2x-2y+z+1)$$

__b__- Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour les quels le volume du tétraèdre ABCM est égale à 2.

EXERCICE N°3 **05 pts**

Une enquête faite sur les élèves d'une classe. Les élèves répondent par oui ou non aux questions suivantes :

- *Aimez vous le cinéma ?*
- *Aimez vous le théâtre ?*

*40 °/° des élèves répondent par **oui** pour la __première__ question et 20 °/° par **oui** pour __deuxième__ question ce pendant 15 °/° répondent par **oui** __la première__ et la __deuxième__ questions à la fois.*

On désigne par : C << l'élève aime le cinéma>> et par : T<< l'élève aime le théâtre >>

1°) *__a__- Les événements C et T sont-ils indépendants ? Justifier.*

__b__- Calculer la probabilité pour que l'élève aime le cinéma ou le théâtre .

__c__- Calculer la probabilité pour que l'élève n'aime ni le cinéma, ni le théâtre

2°) *__a__- Calculer la probabilité pour que l'élève aime le cinéma et n'aime pas le théâtre .*

__b__- Calculer la probabilité pour que l'élève aime le cinéma ou le théâtre mai pas les deux.

3°) *__a__- Calculer la probabilité pour que l'élève aime le théâtre sachant qu'il aime le cinéma .*

__b__- Calculer la probabilité pour que l'élève aime le cinéma sachant qu'il n'aime pas le théâtre.