Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 4$^{\text{ème}}$ ScExp

Avril 2017

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (8 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité graphique 3cm).*

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On note C sa courbe représentative dans le plan P.

1) *Montrer que f est continue à droite en 0.*

2) a) *Montrer que pour tout réel* $t\in[0,+\infty[$, $1-t\le \dfrac{1}{1+t}\le 1-t+t^2$.

b) *En déduire que pour tout réel* $x\ge 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

3) a) *Montrer que pour tout réel* $x>0$ *on a :* $-\dfrac{1}{2}\le \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

b) *En déduire que f est dérivable à droite en 0 et* $f'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$.

4) a) *Montrer que pour tout réel* $t\ge 0$, $\dfrac{1}{(1+t)^2}\le \dfrac{1}{1+t}$.

b) *En déduire que pour tout réel* $x\ge 0$, $\dfrac{x}{1+x}\le \ln(1+x)$.

5) a) *Vérifier que pour tout réel* $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right)$.

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

c) *Tracer la courbe C (on précisera la demi tangente au point d'abscisse 0)*

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite (I_n) *définie pour tout entier naturel non nul n par :* $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx$.

1) a) *Montrer que pour tout* $x\in[1,e]$ *et pour tout entier non nul n on a :*

$$(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}\ge 0$$

b) *En déduire que la suite* (I_n) *est décroissante.*

2) a) *Calculer* I_1.

b) *Démontrer, à l'aide d'une integration par paties, que pour tout entier non nul n, on a :* $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

3) a) Montrer que pour tout entier non nul n, on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

b) Etudier alors la convergence de (I_n).

4) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et déduire la limite de nI_n.

Exercice 3 (7points)

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ces stages ont lieu dans la même plage horaire; leurs thèmes sont la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que:

- *La magie a été choisie par la moitié des enfants et 20% des adultes;*
- *27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10% des enfants.*

1) Recopier et compléter le tableau suivant:

	Magie	Théâtre	Photo	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage.

On pourra utiliser les notations suivantes:

- *A est l'événement «la personne appelée est un adulte»;*
- *M est l'événement «la personne appelée a choisi la magie»;*
- *T est l'événement «la personne appelée a choisi le théâtre»;*
- *N est l'événement «la personne appelée a choisi la photo numérique».*

2) Construire un arbre pondéré.

3) a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?

b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo, sachant que c'est un adulte ?

c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre ?

4) Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est 0,32.

5) Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison? Justifier votre réponse.

.

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)-1} = \lim\limits_{X\to1^+} \frac{\ln X}{X-1} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

2) a) Soit $t \geq 0$, $\begin{cases} \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1-1+t^2}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \geq 0 \Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 = \frac{1-1-t+t+t^2-t^2-t^3}{1+t} = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \end{cases}$

b) Pour $x \geq 0$ on a : $\forall t \in [0,x]$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x (1-t+t^2)dt$

$\Leftrightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq \left[t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^x \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$

3) a) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (*)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$

b) $\begin{cases} \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ on a : } -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \\ \lim\limits_{x\to0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)-x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Donc f dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$

4) a) Soit $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{1-1-t}{(1+t)^2} = \frac{-t}{(1+t)^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$ pour $t \geq 0$.

b) Soit $x \geq 0$ on a $\forall t \in [0,x]$, $\frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$

Donc $\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x} + 1 \leq \ln(1+x)$ ou encore $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$.

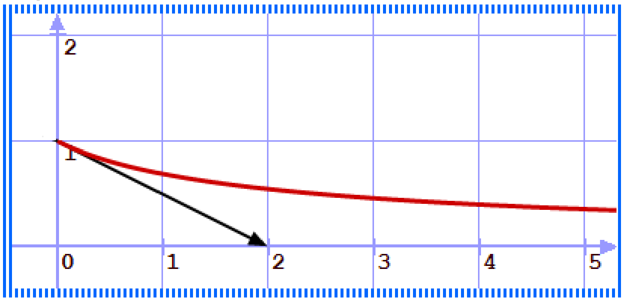
5) a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right)$.

b) $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = \int_0^x \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t}\right)dt = -\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt < 0$ car $x > 0$ et $\frac{t}{(1+t)^2} > 0$ pour $t > 0$

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\quad$ -
$f(x)$	1 $\searrow$ 0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0 \times 1 = 0$

c)



Exercice 2

1) a) $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n(1-\ln x)$

Or $x \in [1,e] \Rightarrow 0 \le \ln x \le 1$ donc $(\ln x)^n \ge 0$

et $1-\ln x \ge 0 \Rightarrow (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \ge 0$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \left((\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n\right)dx \le 0$

$\Rightarrow$ La suite (I_n) est décroissante.

2) a) $I_1 = \int_1^e \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^e = 1$

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx = \int_1^e x.\dfrac{1}{x}(\ln x)^n \, dx$

On pose $\begin{cases} u(t) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^n \Leftarrow v(x) = \dfrac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \end{cases}$

$$I_n = \left[\frac{x}{n+1}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$$

$$= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1}I_{n+1}$$

Donc $(n+1)I_n = e - I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.

c) $I_2 = e - 2I_1 = e-2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = -2e+6$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e+6) = 9e-24$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1,e], (\ln x)^n \ge 0$

$\Rightarrow I_n \ge 0$ donc $I_{n+1} = e-(n+1)I_n \ge 0$

D'où $I_n \le \dfrac{e}{n+1}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$

b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le I_n \le \dfrac{e}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ La suite (I_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4) $I_{n+1} = e-(n+1)I_n = e - nI_n - I_n$

$\Leftrightarrow nI_n + (I_{n+1}+I_n) = e$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, nI_n = e - (I_{n+1}+I_n)$

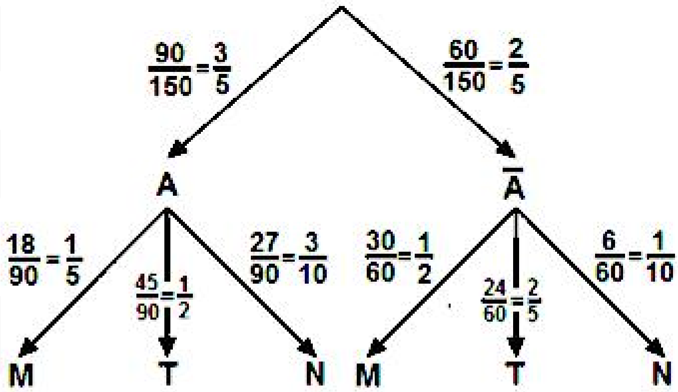
$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ donc la suite (nI_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$

Exercice 3

1)

	Magie	Théâtre	Photo	Total
Adultes	18	45	27	90
Enfants	30	24	6	60
Total	48	69	33	150

2)



3) a) $p(\overline{A}) = \dfrac{150-90}{150} = \dfrac{60}{150} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

b) $p(N / A) = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

c) $p(T \cap A) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

4) $p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap \overline{A})$

$= p(A)p(M / A) + p(\overline{A})p(M / \overline{A})$

$= \dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3+5}{25} = \dfrac{8}{25} = 0,32 = \dfrac{48}{150}$.

5) $p(\overline{A} / M) = \dfrac{p(M \cap \overline{A})}{p(M)} = \dfrac{1}{5}.\dfrac{25}{8} = \dfrac{5}{8} = 0,625$

Le directeur a presque raison car $\dfrac{2}{3}$ est proche de $0,625$.