Epreuve	Devoir de contrôle n°3	Professeur
Mathématiques	Classe : $4^{ème}$ ScExp	Dhaouadi Nejib
Durée : 2H	Avril 2016	

Exercice 1 (9 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité graphique 2 cm).*

1) *Soit u la fonction définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :* $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

   a) *Étudier les variations de u sur* $]0,+\infty[$.

   b) *Calculer u(1) et déduire le signe de u(x) pour* $x \in]0,+\infty[$.

2) a) *Montrer que pour tout réel* $x \in]0,+\infty[$, *on a :* $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^3}$

   b) *Déterminer la limite de f en* $+\infty$.

   c) *Dresser le tableau de variation de f.*

3) a) *Démontrer que la droite d'équation* $\Delta : y = x$ *est une asymptote oblique à la courbe* $\mathscr{C}$ *au voisinage de* $+\infty$.

   b) *Déterminer la position de la courbe* $\mathscr{C}$ *par rapport à la droite* Δ.

   c) *Tracer la courbe* $\mathscr{C}$ *et la droite* Δ.

4) *On note* α *un réel de l'intervalle* $]1,+\infty[$ *et on désigne par* $A(\alpha)$ *l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe* $\mathscr{C}$, *la droite* Δ *et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = \alpha$.

   a) *À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :* $A(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$.

   b) *Déterminer la limite de* $A(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers* $+\infty$.

Exercice 2 (3.5 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$.

1) *A l'aide d'une intégration par parties, calculer* I_1.

2) *Monter que pour tout entier* $n \geq 2$ *on a :*

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}.$$

3) *Calculer* I_2 *et* I_3.

Exercice 3 (7.5 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- *si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.*
- *si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.*
- *si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.*

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D1 : « le dé indique 1 » *D2 : « le dé indique 2 »*

D3 : « le dé indique 3 » *G : « la partie est gagnée ».*

1) *Déterminer la probabilité de chacun des événements :*
   $D1, D2, D3, G/D1, G/D2$ *et* $G/D3$
2) *Faites un arbre de probabilité.*
3) *Montrer que* $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
4) *Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.*
5) *Dans cette question on suppose que le joueur gagne la partie s'il tire, dans chacun des cas cités plus haut, au moins une boule qui porte une voyelle.*
   Calculer $p(G)$.

BON TRAVAIL