Lycée Takelsa Prof :Ziadi Mourad Epreuve :Mathématiques	Devoir de Contrôle N :3	
Date : 23/04/2015	Durée :2h	Classe:4ème Sc.Exp2

Exercice N :1(05pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,on considère les points

A(2,0,1) , B(0,2,1) et C(1,2,0) .

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 3 = 0$.

2) Soit la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

a) Montrer que la sphère S passe par les points A et B.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle (ξ) .

c) Justifier que (ξ) est circonscrit au triangle ABC.

3) Soit le point D de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$

b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$.

c) En déduire que pour tout point M du plan Q ; $\mathcal{V} = \sqrt{\frac{5}{3}} - 1$.

Exercice N :2(04pts)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x})dx$.

1)a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\ln(1 + x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a ; $0 \leq U_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$.

d) Calculer, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = U_0 + U_1 +$…………$+U_n$.

a) Etudier la monotonie de (S_n) .

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n \leq 1 - e^{-n}$.

c) En déduire que (S_n) est convergente.

Exercice N :3(05pts)

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2% des jouets ne satisfont à **aucun des deux contrôles.**

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note les évènements suivants :

F : « le jouet est sans défaut de finition » ;

S : « le jouet réussit le test de solidité » .

1)a) Déterminer p(F) ; p(S/F) et p(S∩F).

b) Montrer que $p(\bar{S}/\bar{F}) = \frac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

d) Déterminer p(S).

e) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

2) Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 Dinars, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 Dinars.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a)Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice N :4(06pts)

I) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :$g(x) = e^x - x - 1$.

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(0)$ .En déduire le signe de $g(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

1) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que la droite Δ :$y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de ($+\infty$).

d) Etudier la position relative de (C) et Δ .

2) a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel x ; $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a)Montrer que O est un point d'inflexion à la courbe (C).

b) Tracer la droite Δ et la courbe (C) dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) .

4) Soit λ un réel strictement supérieur à -2.

On désigne par A(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$.

a) En intégrant par parties $\int_{-2}^{\lambda}(x+2)e^{-x}dx$, montrer que A(λ) = $e^2 - (\lambda+3)e^{-\lambda}$.

b) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

BON TRAVAIL