

<p><u>Epreuve</u> Mathématiques Durée : 2H</p>	<p>Devoir de contrôle n°3 Classe : 4^{ème} ScExp</p>	<p><u>Professeur</u> Dhaouadi Nejib</p>
Avril 2014		

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère l'ensemble (S)

des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$.

Soit m un réel et P_m le plan d'équation $2x - y + 2z + m = 0$.

1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Etudier suivant les valeurs de m , la position de (S) et P_m .

3) Montrer que $(S) \cap P_4$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit D la droite passant par le point $A(2, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q contenant la droite D et perpendiculaire à P_m est : $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère (S) en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

3) En déduire I_2 .

4) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$.

b) Déduire alors que pour tout entier naturel non nul n , $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

5) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est impaire.

2) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Soit x un réel positif.

a) Montrer que $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq f'(t) \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire alors que : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x$.

5) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

b) Tracer la tangente T et la courbe \mathcal{C} .

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque notée g et préciser son domaine de définition D .

b) Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe \mathcal{C}' représentation graphique de g .

7) On désigne par A l'aire de la région du plan limitée par les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = 1 - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

b) En déduire alors que $A = -1 + 4 \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$.