DEVOIR DE CONTRÔLE N°3

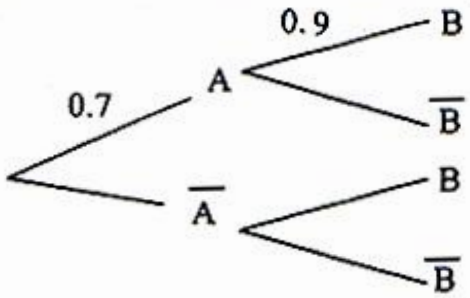
MATHEMATIQUES

Prof : Mohamed Khairedine

Bac sciences

Exercice 1 :

I) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous où A et B sont deux événements dont $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont leurs événements contraires respectifs tel P (B) = 0.87.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse dans chacun des cas suivants :

1) $P(A \cap B) = 0.63$	2) $P(A \cup B) = 0.75$
3) $P(B/\overline{A}) = 0.8$	4) $P(A / B) = 0.35$

II) Cocher l'unique réponse exacte dans chacun des cas suivants :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$ et soit F sa fonction de répartition.

a) On a :

i) $P(X = 2) = 10.\frac{2^2}{3^5}$		ii) $P(X = 2) = 10.\frac{2^3}{3^5}$		iii) $P(X = 2) = \frac{2^3}{3^5}$	

b) Si F est la fonction de répartition de X alors :

i) $F(0.9) = (\frac{2}{3})^5$		ii) $F(0.9) = \frac{5}{3}$		iii) $F(0.9) = (\frac{1}{3})^5$	

c) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [3,19] alors la probabilité de $(X \leq 7)$ est :

i) $\frac{1}{4}$		ii) $\frac{7}{16}$		iii) $\frac{3}{4}$	

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$

On a représenté sur la feuille annexe la courbe Γ de f et la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

   b. Montrer que pour tout $x\in I$, $f^{-1}(x)=\ln(\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$.

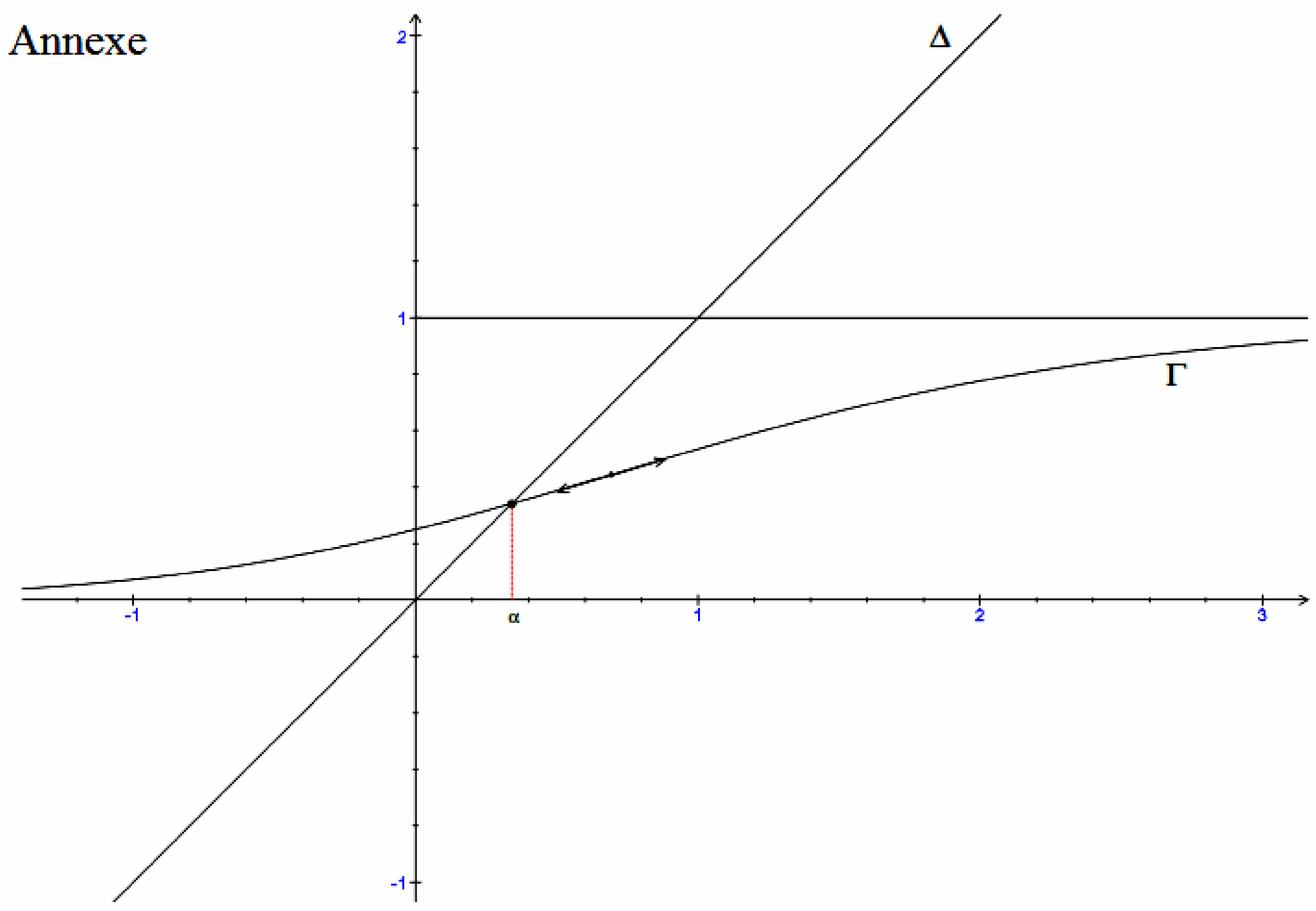
   c. Préciser $f^{-1}(\dfrac{1}{4})$. Tracer soigneusement la courbe Γ'de f^{-1} dans le même repère.

2. a. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites $x=0$, $x=\alpha$ et $y=\alpha$.

   Montrer que $\mathcal{A} = \alpha^2-\ln(\dfrac{1+e^\alpha}{2})-\dfrac{1}{1+e^\alpha}+\dfrac{1}{2}$. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha}\ln(\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})dx$.

   c. Déterminer en fonction de α l'aire $\mathcal{B}$ de la partie du plan limitée par les courbes Γ , Γ' et les deux axes.



Exercice 3:

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher dont 3 blanches numérotées (0,0,1) et 4 noires numérotées (0,1,1,2).

I) On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. On considère les événements A « Avoir un produit nul », B « Avoir une seule boule blanche » et C « A / B ».

1) Calculer les probabilités P (A) et P (B) et montrer que $P(C) = \frac{5}{6}$.

2) On répète l'épreuve précédente 6 fois de suites en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne et on désigne par X l'aléa numérique qui indique le nombre de fois où l'événement C est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Calculer la probabilité d'avoir l'événement C pour la troisième fois au quatrième tirage.

II) On dispose de plus d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé une fois, si on obtient un multiple de 3 alors on tire simultanément 3 boules de l'urne et sinon on tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Soient les événements M «Le numéro de la face supérieur du dé est un multiple de 3» et N « Avoir 3 boules de même numéro ».

1) Calculer les probabilités : $P(M), P(N)$.

2) Calculer la probabilité $P(M / N)$

Exercice 4:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$

a- Montrer que pour tout réel positif t on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b- En déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

c- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x - \frac{x^2}{2n} \leq n\ln(1+\frac{x}{n}) \leq x$

Puis que $e^{x-\frac{x^2}{2n}} \leq (1+\frac{x}{n})^n \leq e^x$

d- Montrer alors que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}} dx \leq I_n \leq 1 - e^{-n}$.