

## DEVOIR DE CONTROLE N°3

Lycée Thélèpte

Avril 2012

Durée : 2heures

Niveau : 4<sup>ème</sup> Sciences expérimentales

Epreuve : Mathématiques

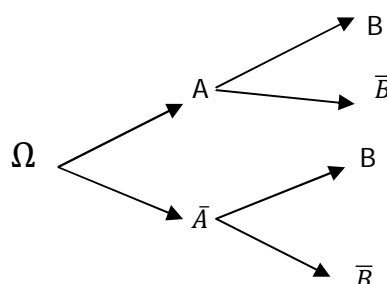
Prof : Mhamdi Abderrazek

### Exercice n°1 : (4points)

On donne l'arbre de probabilité ci-contre

On connaît que  $p(A)=0.2$  ;  $p_A(B) = 0.5$

et  $p_{\bar{A}}(B) = 0.6$ .



1). Compléter cet arbre

2). Calculer  $p(A \cup B)$  ;  $p(B)$  et  $p_B(A)$

3). A et B sont-ils indépendants ?

### Exercice n°2 : (6points)

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 20% des filles et 30% des garçons fument.

1). On choisit un élève au hasard. On note A l'événement <l'élève choisi fume > et F l'événement <l'élève choisi est une fille > et  $p(A)$  la probabilité de A

Quelle est la probabilité que :

- Cet élève soit un garçon ?
- Cet élève soit une fille qui fume ?
- Cet élève soit un garçon qui fume ?

2). Montrer que  $p(A)=0,24$

3). L'enquête permet de savoir que :

- . Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- . Parmi les élèves non fumeurs, la moitié ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement <l'élève choisi a des parents fumeurs >

a). Calculer les probabilités des événements suivant :

C : <l'élève choisi est fumeur et ses parents sont des fumeurs >

D : < l'élève choisi n'est pas un fumeur et ses parents sont des fumeurs >

b). Calculer  $p(B)$ .

4). a). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

b). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

### **Exercice n°3 : (4points)**

Soit  $n$  un entier naturel On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0 ; 1]$  par :  
 $f_0(x) = \ln(x)$  et  $f_n(x) = x^n \ln(x)$  si  $n > 0$  et on pose  $I_n = \int_1^e f_n(x) dx \forall n \in \mathbb{N}$

1). Calculer  $I_0, I_1$  et  $I_2$

2). Etudier la monotonie de  $(I_n)$

3). a). Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .

b). En déduire la limite de  $(I_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

c). la suite  $(I_n)$  est elle majorée ? Justifier.

### **Exercice n°4 : (6points)**

1). On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^{-x}$

a). Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

b). Tracer  $C_g$ , la courbe de  $g$ , dans un repère orthonormé  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

c). Calculer **A** l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :  $x=0 ; x=1 ; y=0$  et la courbe  $C_g$ .

2). on considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

a). Démontrer que  $e^x \neq x \forall x \in \mathbb{R}$

b). Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$

c). Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

d). Tracer  $C_f$ , la courbe de  $f$ , dans un repère orthonormé  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

**BON TRAVAIL**

Lycée Thélèpte

Avril 2012

## Correction du devoir de controle

n°3

Niveau : 4<sup>ème</sup> Sciences experimentales

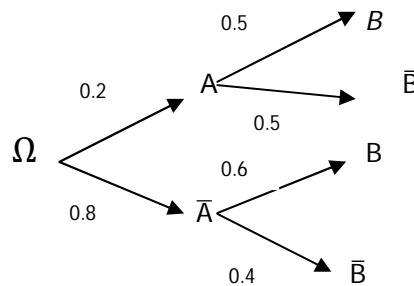
Epreuve : Mathématiques

Prof : Mhamdi Abderrazek

### Exercice n°1 :

1). Voir l'arbre ci-contre

2). i).  $p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.4 \times 0.8 = 0.68.$



ii).  $p(B) = p_A(B) \cdot p(A) + p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.1 + 0.48 = 0.58$

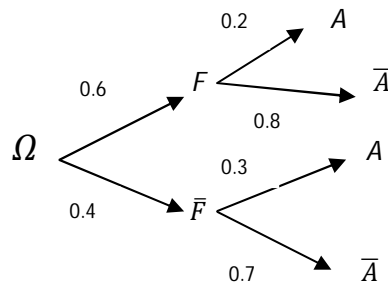
iii).  $p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0.1}{0.58} = \frac{10}{58}$

3). On a  $p(A) \cdot p(B) \neq p(A \cap B)$  signifie A et B ne sont pas indépendants.

### Exercice n°2 :

1). Cette situation est donnée par

l'arbre ci-contre :



a).  $p_1 = 1 - p(F) = 1 - 0.6 = 0.4$

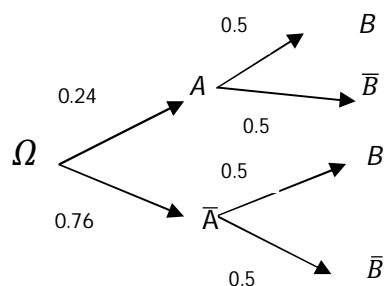
b).  $p_2 = p(A \cap F) = p_F(A) \cdot p(F) = 0.2 \times 0.6 = 0.12.$

c).  $p_3 = p(A \cap \bar{F}) = p_{\bar{F}}(A) \cdot p(\bar{F}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12.$

2).  $p(A) = p_F(A) \cdot p(F) + p_{\bar{F}}(A) \cdot p(\bar{F}) = 0.12 + 0.12 = 0.24.$

1). Cette situation est donnée par

l'arbre ci-contre :



a). i).  $p(C) = p(A \cap B) = p_A(B) \cdot p(A) = 0.12.$

ii).  $p(D) = p(\bar{A} \cap B) = p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.38$ .

b).  $p(B) = p_A(B) \cdot p(A) + p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.12 + 0.38 = 0.5$ .

4). a).  $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.12}{0.5} = 0.24$ .

b).  $p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0.24 \times 0.5}{0.5} = 0.24$ .

**Exercice n°3 :**

1).  $I_0 = \int_1^e f_0(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x] = \boxed{1}$

$I_1 = \int_1^e f_1(x) dx = \int_1^e x \ln(x) dx$ . on pose  $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$I_1 = [\frac{x^2}{2} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2}]_1^e = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}$

$I_2 = \int_1^e f_2(x) dx = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$ . on pose  $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$I_2 = [\frac{x^3}{3} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} [\frac{x^3}{3}]_1^e = \boxed{\frac{2e^3 + 1}{9}}$

2). a).  $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^n \ln(x) (x - 1) dx \geq 0$  (car  $x^n \geq 0$  et  $\ln(x) \geq 0$  et  $(x - 1) \geq 0 \forall x \in [1; e]$ )

d'où  $I_{n+1} \geq I_n$  donc  $(I_n)$  est croissante.

3).  $I_n = \int_1^e f_n(x) dx = \int_1^e x^n \ln(x) dx$ . on pose  $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^n \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$I_2 = [\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{(n+1)x} dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_1^e = \frac{n e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$

b). On pose  $x = n+1$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \frac{e^x}{(x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \frac{1}{(x)^2} = +\infty$ .

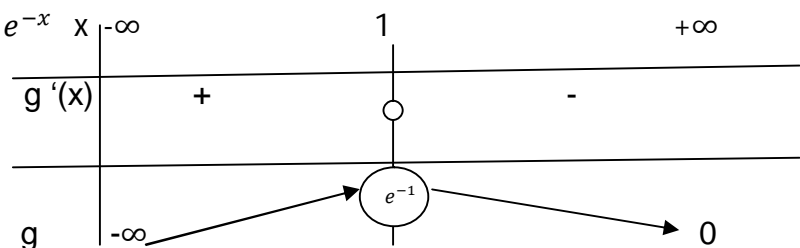
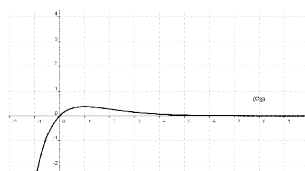
c). Supposons que  $(I_n)$  est majorée, on aura  $(I_n)$  est convergente car  $(I_n)$  est croissante ce qui est absurde car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$  d'où  $(I_n)$  n'est pas majorée.

**Exercice n°4 :**

1). a).  $g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$



b).

c).  $A = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx$ . on pose  $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$A = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} + 1) = 1 - 2e^{-1}$  u.a.

2). a). Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x$

On a  $g'(x) = e^x - 1$

|         |           |         |           |
|---------|-----------|---------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | $\circ$ | +         |
| $g$     |           |         |           |

On a 1 est un minimum global de  $g$  donc  $g(x) \geq 1$  d'où  $g(x) > 0$

Signifie  $e^x - x > 0$  signifie  $e^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d'où  $e^x \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b). On a  $e^x \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$ , signifie  $e^x - x \neq 0$  signifie  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

. On a la fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

la fonction  $x \mapsto e^x - x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $e^x - x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

d'où  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

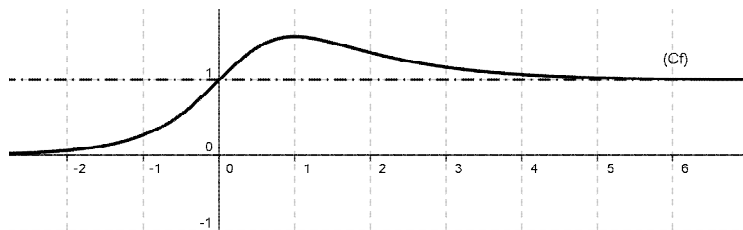
c).  $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$

On a  $f(1) = \frac{e}{e-1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

d).

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$             | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | $\circ$         | -         |
| $f$     | $0$       | $\frac{e}{e-1}$ | $1$       |



**BON TRAVAIL**