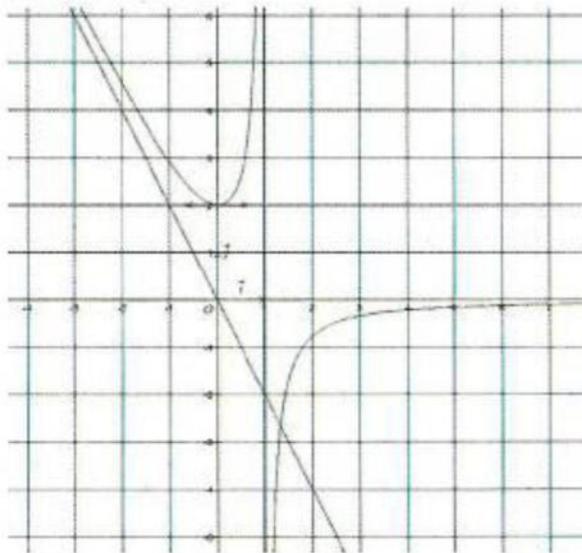


Exercice n°1(4points)

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Les droites d'équations respectives $x=1$, $y=0$ et $y=-2x$ sont asymptotes à C.



1/ Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a/ Donner les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de f .

2/ Montrer que dans l'intervalle $[-1; 0]$, l'équation $f(x) = 2,5$ possède une solution unique notée α .

3/ On admet qu'il existe une constante réelle m telle que pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + mx - \frac{1}{x-1}.$$

a/ En utilisant la valeur de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ trouvée à la question 1/a/, montrer que $m = -1$

b/ Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice n°2(6points)

Partie I

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$

- 1) Etudier le sens de variations de f . Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer l'entier n tel que

$$l \in]n; n + 1[$$

- 3) Déterminer le signe de f (x)

Partie II

La fonction g est définie sur \mathcal{R} par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$
- 3) Montrer que $g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$ Dresser le tableau de variation de g.
- 4) Donner les équations des tangentes à la courbe C représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$
- 5) Calculer limite de $\frac{g(x)}{x}$ quand x tend vers 0^+ interpréter graphiquement cette limite.
- 6) Représenter succinctement G et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice n°3(5points)

(Dans tout cet exercice, les résultats concernant la population seront arrondis au million).

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i	361	439	548	683	846

On cherche à étudier l'évolution de la population y en fonction du rang x de l'année.

- 1) Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.
- 2) Le modèle étudié dans cette question sera appelée « droite de Mayer ».
 - a) G1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G2 celui des deux derniers points. Déterminer les coordonnées de G1 et de G2.
 - b) Déterminer l'équation réduite de (G1G2) sous la forme $y = a x + b$.
 - c) Tracer la droite (G1G2) sur le graphique précédent.
 - d) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.
- 3) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
- 4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire
 - a) Tracer cette droite D sur le graphique précédent.
 - b) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.

Exercice n°4(5points)

- 1) a) démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entier relatifs tels que $19u+12v=1$
 b) vérifier que pour un tel couple le nombre $N=13x12v+6x19u$ on a

$$\begin{cases} N \equiv 13(mod19) \\ N \equiv 6(mod12) \end{cases}$$
- 2) déterminer une solution (u_0, v_0) de $19u+12v=1$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- 3) soit $N_0 = 13x12v_0 + 6x19u_0$ vérifier que pour tout N de \mathbb{Z} on a

$$\begin{cases} N \equiv 13(mod19) \\ N \equiv 6(mod12) \end{cases} \text{ équivaut a } \begin{cases} N \equiv N_0(mod19) \\ N \equiv N_0(mod12) \end{cases}$$
- 4) résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $17x-13y=4$
- 5) montrer que pour tout N de \mathbb{Z} on a

$$N \equiv 18(mod221) \text{ équivaut a } \begin{cases} N \equiv 5(mod13) \\ N \equiv 1(mod17) \end{cases}$$