Lycée Tamaghza 2013-2014	Devoir de Synthèse N° 1	Classe : 4ème SI

Exercice n° 1 :

Choisir la bonne réponse : z étant un nombre complexe.

1. La partie imaginaire de i est :

(a) 1 **(b)** i **(c)** 0 .

2. $z+\bar{z}$ est :

(a) réel **(b)** imaginaire pur **(c)** nul.

3. $z-\bar{z}$ est :

(a) réel **(b)** imaginaire pur **(c)** nul.

4. $z\times\bar{z}$ est :

(a) imaginaire pur **(b)** réel négatif **(c)** réel positif.

5. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=iz$ est :

(a) $\{0\}$ **(b)** $\{i\}$ **(c)** $\{0;i\}$.

Exercice n° 2 :

On considère les deux suites récurrentes (v_n) et (w_n) telles que :

$$v_0=1, w_0=\sqrt{2} \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+1}=\dfrac{v_n+w_n}{2} \\ w_{n+1}=\dfrac{v_n+\sqrt{2}w_n}{1+\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $z_n=w_n-v_n$.

a. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$.

b. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n\leq w_n$.

c. Etablir que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

d. En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent et ont la même limite.

Exercice 3 : (Voir Annexe)

Pour crypter (rendre secret) un message, on procède de la manière suivante :

A chacune des 26 lettres de l'alphabet, on associe un entier $n \in \{0;1;...;25\}$ dans le même ordre que celle –ci.

Le reste r de la division de l'entier $(m = 5n+2)$ par 26 associe la lettre correspondante.

Exemple : pour crypter la lettre E, on procède comme suit :

1ère étape: on associe à E l'entier 4.

2ème étape: le reste de la division de $(5\times 4+2) = 22$ par 26 est 22.

3ème étape : on associe 22 à W.

Ainsi, E est crypté en W.

1. Crypter le mot « ENNEMI »

2. On se propose de décrypter le mot « CKQ ».

2. a Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ chacune des équations suivantes:

(i) $5x - 26y = 0$.

(ii) $5x - 26y = 8$. (remarquer que $(12,2)$ est une solution).

(iii) $5x - 26y = 14$. (poser $z = 2y+1$, résoudre $5x - 13z = 1$ puis $5t - 2y = 1$).

2. b Prouver que chacune de ces équations admet une solution unique (x, y)

vérifiant $0 \le x \le 25$.

2. c Décrypter le mot « CKQ ».

Exercice n° 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$ $(\mathcal{E}_1)$

2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 - (3+5i)z^2 + (-5+10i)z + 7 + i = 0$ $(\mathcal{E})$

2. a Vérifier que i est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

2. b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E})$.