

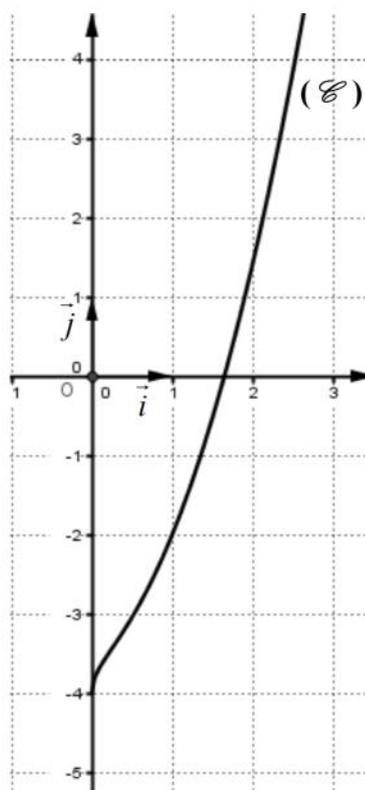
Exercice n° 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$.

- 1) a) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1,6 ; 1,7[$.
- 3) On donne ci-dessous la courbe (\mathcal{C}) de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A partir du graphique

- a) Déterminer : $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Déterminer l'image de $]0 ; 1]$ et $[\alpha, +\infty[$ par f .



Exercice n° 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

- 1) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Déterminer l'expression de f^{-1} .

Exercice n° 3 : (6 points)

1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 - (3 + 4i)z - 8 + 6i = 0$.

2) On considère, l'équation $(E) : z^3 - (1 + 4i)z^2 - (14 + 2i)z - 16 + 12i = 0$.

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E) .

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que

$$z^3 - (1 + 4i)z^2 - (14 + 2i)z - 16 + 12i = (z + 2)(z^2 + bz + c).$$

c) Résoudre alors, l'équation (E) .

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , (**On prend** $\|\vec{u}\| = 1 \text{ cm}$).

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$ et $z_B = 4 + 2i$.

a) Placer les points A et B .

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle ?

c) Déterminer l'affixe z_C du point C tel que $OACB$ soit un rectangle.

Exercice n° 4 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{U_n}{1 + U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Trouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.