

EXERCICE N°1 : (3 points)

- 1) a - Effectuer la division euclidienne de 320 par 15
b - En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de (-320) par 15
- 2) a - Vérifier les congruences : $4^5 \equiv 1[11]$ et $9^5 \equiv 1[11]$.
b - En déduire que $4^{104} - 9^{103}$ est divisible par 11
- 3) Montrer que pour tout entier naturel, $3 \times 19^{6n+1} - 2 \times 16^{3n+2} \equiv 0[7]$.

EXERCICE N°2 : (6 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n + 1} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1) a - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $1 \leq U_n \leq 2$.
b - Montrer que la suite (U_n) est croissante.
c - En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .
- 2) a - Vérifier que : $2 - U_{n+1} = \frac{1}{U_n + 1} (2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b - En déduire que : $2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c - Montrer par récurrence que : $2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - U_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d - Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE N°3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 - x^2}{2 + x^2}$

- 1) Montrer que f est dérivable sur et que $f'(x) = \frac{-8x}{(2 + x^2)^2}$
- 2) Démontrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Soit f^{-1} la réciproque de f .
Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1} .
- 4) Dans l'annexe ci - jointe (**page 3**), (C) est la courbe représentative de dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative (C') de f^{-1} .

- 5) On considère l'équation $f(x) = x$.
a - Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalent à l'équation : $-x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
b - Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$.
c - Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$.
- 6) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE N°4 : (5 points)

1) a - Vérifier que : $(3 + i)^2 = 8 + 6i$.

b - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation: $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$ on donnant les solutions sous forme algébrique

2) Pour tout z de \mathbb{C} , on pose $f(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 6i)z + 3 - 4i$.

a - Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet dans \mathbb{C} une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

b - Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout z de \mathbb{C} on a : $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$

c - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B

et C les points d'affixes respectives i , $2 - i$ et $1 + 2i$

b - Déterminer la nature du triangle ABC .

c - Déterminer l'affixe du point D pour que $ABDC$ soit un rectangle..

Feuille à rendre avec la copie

Non et prénom : Classe :

Annexe pour l'exercice 2

