Lycée secondaire : 18 / 01 / 52 Djebeniana : date :06/12/09	**DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1** (MATHÉMATIQUES)	Prof : ABID HASSEN section:4ème année sc info 1 & 2 Durée : 2 heures

EXERCICE N°1 : (3 points)

On considère une fonction f définie, continue et dérivable sur IR \ {2} et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	-2 ↗	0	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Répondre par vrai ou faux sans justification.

Une réponse correcte vaut **0,5** point, une réponse fausse vaut **– 0,5** point et l'absence de réponse vaut **0** point.

Si le résultat global est négatif la note de l'exercice est amenée à 0 .

1) $f'(-1) = 0$.
2) -2 est un minimum global de f.
3) $f(0) < 0$.
4) Pour tout $x \in [-1, 2[$, $f'(x) \geq 0$.
5) Dans l'intervalle $]-\infty, 1]$, l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions distinctes
6) La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à (C) .

EXERCICE N°2 : (6 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose $p(z) = z^3 - (1 - 2i)z^2 + (3 - 2i)z - 3$.
   a - Vérifier que $p(z) = (z - 1)(z^2 + 2iz + 3)$
   b - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , $-3i$ et i

A tout point M du plan distinct de B et d'affixe z ,on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{z-1}{3-iz}$

   a - Vérifier que pour tout $z \neq -3i$; $z' = \dfrac{i(z-1)}{z+3i}$

   b - Montrer que $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$.

   c - Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

3) a - Montrer que $|z' - i| \times |z + 3i| = \sqrt{10}$.

   b - En déduire que si M appartient a un cercle ζ de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera le centre et le rayon .

EXERCICE N°3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b - Dresser le tableau de variation de g.

   c - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) > 0$

2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x / g(x)$.

   a - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g(x)$.

   b - Etudier les variations de f

3) a - Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera

   b - Soit f^{-1} la réciproque de f .Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1}.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

EXERCICE N°4 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4 + 3U_n} \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a - Montrer que la suite(U) est majorée par 4.

   b - Montrer que la suite (U_n) est croissante.

   c - En déduire que la suite (U_n) converge et déterminer sa limite.

2) a - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

   b - En déduire que : $4 - U_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - U_0)$.

   c - Retrouver alors la limite de (U_n).