

Devoir de Contrôle N°1

L.S :02/03/34

Goubellat

Date : 02/11/2016

Classe : 4^{eme} année

Prof :Hamdi

Section : Sciences de l'informatique

Epreuve : Mathématiques

Durée : 2h

Coefficient :3

EXERCICE N° 1 (4 Pts)

Une fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{4\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ 	$+\infty$ 	$-\infty$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1°) a°/ Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution a dans $\mathbb{R} - \{4\}$.

b°/ Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2°) Lorsque cela est possible déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f(x)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$$

3°) Répondre par vrai ou faux sans justification.

a°/ 1 est un minimum local de f .

b°/ 3 est un maximum local de f .

c°/ La droite d'équation $x = 4$ est une asymptote à (C) .

d°/ La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote à (C) .

EXERCICE N° 2 (6 Pts)

1°) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + \sin 2x$

a°/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$

b°/ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2°) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^4 - x^3 + 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

a°/ Montrer que f admet une limite en 0.

b°/ Montrer que pour tout : $x \geq 0$ on a : $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$

c°/ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Interprète géométriquement le résultat

3°) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x)$

EXERCICE N° 3 (4 Pts)

On donne les nombre complexes : $Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = 2 - i$ et $Z_3 = -1$

1°) Calculer $\frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_1 - Z_3|}$ et $(Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1 - Z_3})$

2°) Dans le plan complexe muni dun repère orthonormé

a°/ Placer les points A, B et C d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3

b°/ Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle

EXERCICE N° 4 (6 Pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{U}, \vec{V})

On désigne par A le point d'affixe i et par B le point d'affixe $-2i$

Soit f l'application de P- $\{A\}$ dans P qui à tout point M d'affixe Z on associe le point M' d'affixe le nombre complexe

$$Z' = \frac{2Z - i}{iZ + 1}$$

1°) a °) Ecrire Z' sous forme cartésienne pour $Z = 1 + i$

b °) Déterminer Z pour que $Z' = 1 + 2i$

2 °) Déterminer les ensembles suivantes

a °) $E = \{M(Z) / Z' \text{ est réel}\}$

b °) $F = \{M(Z) / |Z'| = 2\}$

3 °) a °) Montrer que $(Z' + 2i)(Z - i) = 1$

b °) En déduire que lorsque M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera

4 °) Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})i$

a °) Calculer l'affixe de vecteur \overline{AT}

b °) En déduire que T appartient à (C)

BONNE CHANCE