

# Devoir de contrôle n°1

4<sup>ème</sup> Sciences de l'informatique

Prof : NOBBIGH Dhaou

Mardi 11 novembre 2014

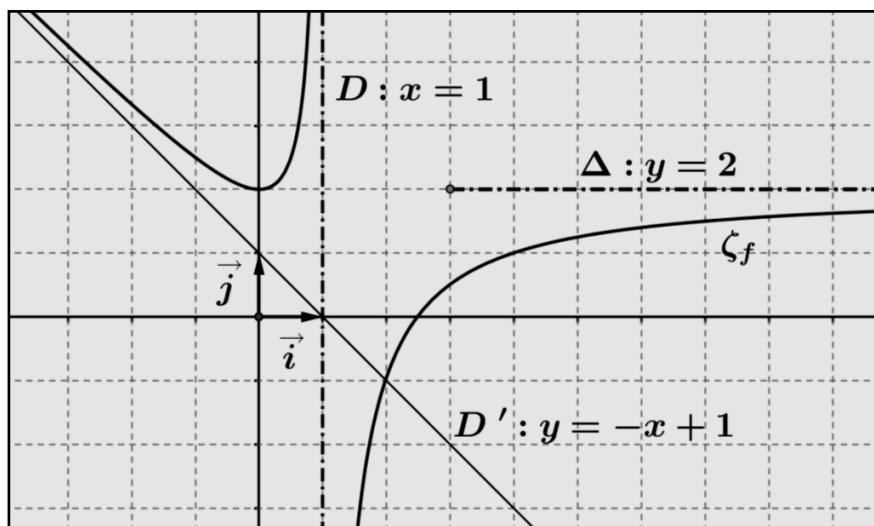
Durée : 2 Heures

## EXERCICE ①

6 points

1) Dans la figure ci-contre :

- \*  $C_f$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$ .
- \* La droite  $\Delta : y = 2$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- \* La droite  $D : x = 1$  est une asymptote verticale à  $C_f$ .
- \* La droite  $D' : y = -x + 1$  est une asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .



Par lecture graphique :

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $f(x) = 2$
  - Préciser  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x - 1)$
  - Dresser le tableau des variations de  $f$ .
- 2) Soit  $g$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  et dont le tableau des variations est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$g(x)$	0	$\downarrow$	$\uparrow +\infty$	6
		$\searrow -2$		$\searrow -\infty$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g \circ f$ .
- Déterminer  $(g \circ f)(2)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$
- Déterminer le sens des variations de la fonction  $g \circ f$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$

### EXERCICE ②

7 points

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{3U_n + 6}{4 + U_n}$  pour tout entier naturel  $n$ .

- 1) a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .  
b) Justifier que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) a) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_{n+1} = 3 - \frac{6}{4 + U_n}$   
b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $-3 < U_n < 2$   
c) Montrer que la suite  $U$  est croissante.  
d) En déduire que la suite  $U$  est convergente et calculer sa limite.
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3}$ .  
a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_n = \frac{2 + 3V_n}{1 - V_n}$ .  
b) Montrer que la suite  $V$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$   
c) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
d) Retrouver alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

### EXERCICE ③

7 points

- 1) a) Mettre sous forme cartésienne le nombre complexe  $(4 - 2i)^2$ .  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 + (2 - 4i)z - 6 = 0$ .
- 2) Pour un nombre complexe  $z$ , on pose :  $f(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 12i$ .  
a) Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.  
b) Déterminer les nombres complexes  $b$  et  $c$  tels que :  $f(z) = (z + 2i)(z^2 + bz + c)$ .  
c) Résoudre alors l'équation  $f(z) = 0$ .
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-2i$ ;  $1 + i$  et  $-3 + 3i$ . Soit  $D$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $O$   
a) Justifier que  $z_D = 3 - 3i$   
b) Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .  
c) Calculer  $AB$ ,  $AD$  et  $BD$ . En déduire la nature du triangle  $ABD$ .  
d) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|\bar{z} + 3 + 3i| = |z + 2i|$