

: _____ _____	 Devoir de contrôle n°01
Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ^{ème} Inf
Samedi 17-11-2012	Chortani Atef

Exercice 1(3 points)

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de dérivabilité de f et sa fonction dérivée f'

1) $f(x) = \sqrt{x^6 + x^2 + 4} - x$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 2}$

3) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

Exercice 2 (6 points)

1) a) Calculer $(3 + i)^2$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_1) : z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$

2) Soit l'équation $(E_2) : z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = (z - 2i)(z^2 + (1 + 3i)z - 4)$$

b) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E_2)

2) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $1 - i$ et $-2 - 2i$

a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})

b) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B

Exercice 3 (4,5 points)

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer le déterminant de A en déduire que inversible

b) Calculer $A^2 - A$ en déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

2) On considère dans \mathbb{R}^3 le système

$$S: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

a) Donner l'écriture matricielle de (S).

b) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système (S).

Exercice 4 (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x}} - x$

On désigne par (φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ Interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (φ)

c) Étudier la position relative de φ par rapport à (φ)

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{4x^2 + x}} - 1$

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution α .

b) Vérifier que $2,1 < \alpha < 2,2$ et que $\alpha = \frac{1}{4}(\alpha^3 - 1)$

c) En déduire le signe de f

d) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans un intervalle $]a; b[$ que l'on précisera

4) Construire (φ) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Correction de devoir

Exercice 1

1) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x$

f dérivable sur \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} - 1$$

$$= \frac{2x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} - 1$$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 2}$

f dérivable sur \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 2 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + x + 2)^2}$$

3) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2+1}$

f dérivable sur \mathbb{R}

$$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2

a) $(3+i)^2 = 9 + 6i - 1$
 $= 8 + 6i$

b) $(E): z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

$a = 1$
 $b = 1+3i$
 $c = -4$

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4 \times (-4)$$

$$= 8 + 6i = (3+i)^2$$

$$z = \frac{-(1+3i) - (3+i)}{2} \text{ ou } z = \frac{-(1+3i) + (3+i)}{2}$$

$$= -2 - 2i$$

$$= 1 - i$$

$$S = \{1 - i; -2 - 2i\}$$

2) $(E): (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4) = 0$

$$= z^2 + (1+3i)z^2 - 4z - 2iz^2 - 2i(1+3i)z + 8i$$

$$= z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i$$

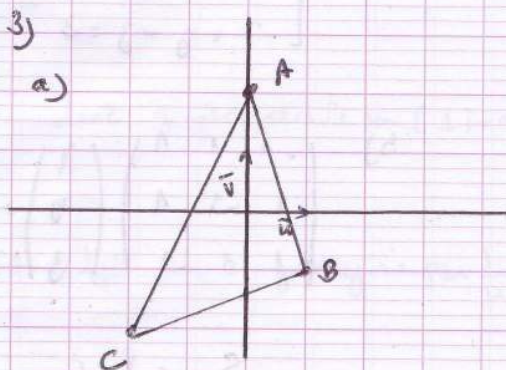
b) $(E): z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

$$z = 2i$$

$$z = 1 - i \text{ ou } z = -2 - 2i$$

$$S = \{2i; 1 - i; -2 - 2i\}$$



b) $AB = |1 - i - 2i| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

$$AC = |-2 - 2i - 2i| = |-2 - 4i| = \sqrt{20}$$

$$BC = |-2 - 2i - 1 + i| = |-3 - i| = \sqrt{10}$$

$$BA = BC$$

$$BA^2 + BC^2 = AC^2 \quad \left. \begin{array}{l} BA = BC \\ BA^2 + BC^2 = AC^2 \end{array} \right\} \text{ABC Triangle} \\ \text{re Triangle isoscele en B}$$

Exercice 3

$$1) a) \det A = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ donc } A \text{ inversible}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

$$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A - I) = 2I_3$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$a) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x} \quad \text{si } x \in [1; +\infty[\setminus \{2\} = D_f$$

I)

1) $x \mapsto x-1$ poly positive sur D_f

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{x-1}$ continue sur D_f

$x \mapsto x^2-2x$ polynome non nul sur D_f

} f continue sur D_f

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{x(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{4}$$

II)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$1) g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} = 1$$

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 \quad \text{Donc } g \text{ continue en } 1$$

2) a) g dérivable sur $[1; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x-1}+1 + x \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{(x(\sqrt{x-1}+1))^2} < 0 \quad \text{donc } g \text{ décroissante sur } [1; +\infty[$$

b) si $x \in [1; +\infty[\Rightarrow \underset{g(x)}{g(x)} \leq g(1) = \frac{1}{4}$ donc g majoré par $\frac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$

3) g est dérivable sur $] -\infty; 1[$

$$g'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \quad \Rightarrow g \text{ croissante sur }] -\infty; 1[$$

4) a) sur $[1; +\infty[$ on a $g(n) = \frac{1}{n(\sqrt{n-1}+1)} > 0$

\Rightarrow Pour tout $n \in [1; +\infty[$ on a $g(n) \neq 0$

sur $]0, 1[$ on a :

- g continue strictement croissante

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = -\frac{1}{2} < 0 \\ g(1) = \frac{1}{n} > 0 \end{array} \right\} g(0) \times g(1) < 0$$

d'eq $g(n) = 0$ admet
une unique solution $\alpha \in]0, 1[$

b) $g(0,5) = \frac{4-3\sqrt{2}}{6} \approx -0,04 < 0$
 $g(0,75) = 0,3 > 0$ } $\alpha \in]0,5; 0,75[$

c) $\frac{n}{g(n)} \begin{array}{c} -\infty \\ - \\ 0 \\ + \\ +\infty \end{array}$

d) $\alpha \in]0, 1[\Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}+1)}$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\frac{1}{2-\alpha}+\sqrt{\alpha}} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2-\alpha} - \sqrt{1-\alpha} = 0 \right)$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha)\sqrt{\alpha}}{1+(2-\alpha)+\sqrt{\alpha}}$$