

DEVOIR DE CONTROLE N°1

Date : Le 06 /11/ 2009

Durée : 2 heures

NOM : PRENOM :

CLASSE : NUMERO :

Exercice n°1 :

Cocher la réponse exacte.

1. La limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$ en $(+\infty)$ est :
 $(+\infty)$ 1 -1.
2. Le nombre complexe $Z = (1+i)^6$ est :
 un réel un imaginaire pur . ni réel ni imaginaire.
3. Si l'équation (E) : $z^2 + bz + i = 0$ admet $z_0 = i$ comme solution dans \mathbb{C} alors le nombre complexe b est égale à :
 $1-i$ $-1-i$ $1+i$
4. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 3$ alors sa courbe C_f représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote d'équation :
 $y = x - 3$ $y = x + 3$ $y = -x + 3$
Exercice n°2 :1) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + \sin 2x$ a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} ; $x-1 \leq g(x) \leq x+1$.b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0 \\ x & \\ x^4 - x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et C_f sa courbe représentative dans unrepère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.a) Montrer que f admet une limite en 0.b) Montrer que pour tout $x > 0$; $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$.c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interprète géométriquement le résultat3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x)$

Exercice n°3

Soit u_n la suite définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} \end{cases} .$$

1) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} on a $u_n \geq 1$.

2) a- Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n^2}{2u_{n+1}+u_n}$

b- Etudier la monotonie de la suite u_n .

c- Prouver que u_n est convergente puis calculer sa limite.

3) Soit v_n la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n = u_n^2 - 1$.

a- Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c- Retrouver la limite de u_n quand n tend vers $(+\infty)$.

3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ puis $S_n' = \sum_{k=0}^n (u_k)^2$ en fonction de n .

Exercice n°4

1) a) Ecrire sous-forme algébrique le nombre complexe $U = 1 - i^2$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})
on considère les points A,B et C d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = 2+i$ et $c = 1+2i$

a) Placer les points A,B et C sur une figure.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

c) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que ACDB est un carré.

3) Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left| \frac{z-(2+i)}{z-(1+2i)} \right| = 1$

Déterminer et construire l'ensemble Δ .

FIN