Mme Ben Ayed	Lycée Attarine Ariana	Devoir de Contrôle N°1	4e Info	2009-2010

Exercice 1 : (3 points)

QCM *Trouver la seule bonne réponse :*

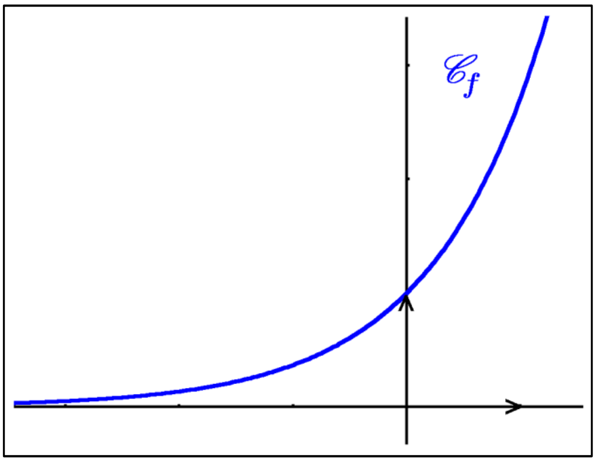
1) *Soient* (U_n) *et* (V_n) *deux suites tels que :* $U_n \geqslant V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, *on a alors :*

ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) *Soit* (U_n) *une suite croissante non majorée, on alors :*

ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) *Soit la fonction f dont la courbe est la suivante :*



Soit la suite (U_n) *définie comme suit :* $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = 1 \end{cases}$

Que peut on dire de la monotonie de (U_n)

ⓐ (U_n) *est croissante* ⓑ (U_n) *est décroissante* ⓒ *On ne peut pas conclure*

Exercice 2 : (6 points)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{U_n} \text{ ; pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n < 4$

b) *Montrer que la suite U est croissante*

c) *En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite*

2) *Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par* $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 1}$

a) *Montrer que V est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{4}$

b) *Exprimer* V_n *puis* U_n *en fonction de n*

c) *Retrouver alors la limite de* (U_n)

Exercice 3 : (6 points)

On donne les nombre complexes : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$ *et* $z_3 = -1$

1) *Calculer* $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right|$ *et* $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_3)}$

2) *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé*

a) *Placer les points* A, B *et* C *d'affixes respectives* z_1, z_2 *et* z_3

b) *Montrer que le triangle* ABC *est rectangle isocèle*

3)a) *Vérifier que* $(1-2i)^2 = -3 - 4i$

b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

Exercice 4 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A *et* B *les points d'affixes respectives* i *et* $-i$

A tout point M *d'affixe* $z\,(z \neq -i)$, *on associe le point* M' *d'affixe* z' *tel que* $z' = \dfrac{iz+1}{z+i}$

1) *Déterminer la forme algébrique de* z' *lorsque* $z = 1 - i$

2)a) *Montrer que, pour tout* $z \neq -i$, *on a :* $|z'| = \dfrac{MA}{MB}$

b) *En déduire l'ensemble des points* M *tel que :* $|z'| = 1$

3) *Déterminer l'ensemble des points* M *tel que* z' *est réel.*

M[me] Ben Ayed	Lycée Attarine Ariana	Correction du Contrôle N°1	4[e] Info	2009-2010

Exercice 1 :

1) ⓐ $\boxed{1}$ 2) ⓑ $\boxed{1}$ 3) ⓐ $\boxed{1}$

Exercice 2 :

1)a) *On procède par récurrence, c'est vrai pour* $n=0$ *puisque* $1<\left(U_0=2\right)<4$, $\boxed{1}$

Supposons que $1<U_n<4$,

on a donc $\frac{1}{4}<\frac{1}{U_n}<1 \Leftrightarrow -4<\frac{-4}{U_n}<\frac{-4}{4} \Leftrightarrow 1<5-\frac{4}{U_n}<4 \Leftrightarrow 1<U_{n+1}<4$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+5U_n-4}{U_n}>0$ *car*

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$-x^2+5x-4$	$-$	0	$+$	0	$-$

d'où $U\nearrow$ $\boxed{1}$

c) *U croissante et majorée par 4 donc convergente,*

$$\left.\begin{array}{l} U_{n+1}=f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } [1,4] \\ U_n\in[1,4] \\ (U_n) \text{ est convergente vers } \ell \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \frac{5\ell-4}{\ell}=\ell \Leftrightarrow \ell^2-5\ell+4=0 \\ \text{d'où } \ell=4 \text{ ou } \ell=1\,(\text{à rejeter car } U_n\geq U_0=2) \\ \text{ainsi } \lim_{+\infty} U_n=4 \end{array}$$ $\boxed{1}$

2)a) $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-4}{U_{n+1}-1}=\frac{5U_n-4-4U_n}{5U_n-4-U_n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{U_n-4}{U_n-1}=\frac{1}{4}V_n$ $\boxed{1}$

b) $V_n=V_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ *avec* $V_0=\frac{U_0-4}{U_0-1}=\frac{2-4}{2-1}=-2$ $\boxed{0,5}$

$$V_n=\frac{U_n-4}{U_n-1} \Leftrightarrow U_nV_n-V_n=U_n-V_n \Leftrightarrow U_n=\frac{-4+V_n}{V_n-1} \Leftrightarrow U_n=\frac{-2\left(1/4\right)^n-4}{-2\left(1/4\right)^n-1}$$ $\boxed{1}$

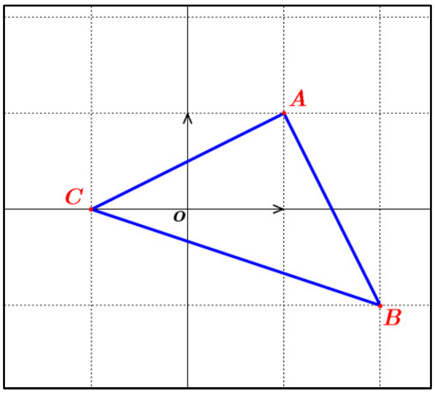
c) *On a* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ *donc* $\lim_{+\infty} U_n=4$ $\boxed{0,5}$

Exercice 3 :

1) $\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right|=\left|\frac{-1+2i}{2+i}\right|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$; $\boxed{2}$

$\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1-z_3}\right)=(-1+2i)(2-i)=-\cancel{2}+i+4i+\cancel{2}=5i$

2)a) $\boxed{1}$



b) $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{5}$

$AC = |2+i| = \sqrt{5}$ $\boxed{1}$

$BC = |3-i| = \sqrt{10}$

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ AB = AC \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \text{ est un rectangle isocèle en } A$$

3)a) $(1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$ $\boxed{1}$

b) $\Delta = 9 - 4(3+i) = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i = (1-2i)^2$

$$d\text{'où } z_1 = \frac{3+1-2i}{2} = 2 - i \text{ et } z_1 = \frac{3-1+2i}{2} = 1 + i \text{ donc } S_{\mathbb{C}} = \{2-i, 1+i\} \quad \boxed{1}$$

Exercice 4 :

1) $z' = \dfrac{iz+1}{z+i} = \dfrac{i(1-i)+1}{1-i+i} = 2 + i$ $\boxed{1}$

2)a) $|z'| = \dfrac{|i(z-i)|}{|z+i|} = \dfrac{AM}{BM}$ $\boxed{1}$

b) $|z'| = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{Med}[AB]$ $\boxed{1}$

3) z' *est un réel* $\Leftrightarrow \overline{z}' = z'$

$\Leftrightarrow \overline{\dfrac{iz+1}{z+i}} = \dfrac{iz+1}{z+i} \Leftrightarrow \dfrac{-i\overline{z}+1}{\overline{z}-i} = \dfrac{iz+1}{z+i}$

$\Leftrightarrow (-i\overline{z}+1)(z+i) = (iz+1)(\overline{z}-i)$

$\Leftrightarrow -iz\overline{z} + \overline{z} + z + i = iz\overline{z} + z + \overline{z} - i$ $\boxed{2}$

$\Leftrightarrow -2i(1 - z\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow (1 - z\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 1 - z\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Rightarrow OM = 1$ *donc* $M \in \mathscr{C}_{(O,1)} \setminus \{B\}$