

Lycée Rue Taib El Mhiri	Devoir De Controle n°1 En Mathématiques	Classe 4 s – Inf3 Durée 2 H
Pr. : S - CHENIOUR		Le 10/11/09

Exercice n°1 : 5 points

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1 + i = 0$.

2) Soit α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_α) : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + e^{2i\alpha} - 1 = 0$.

3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + e^{i\alpha}$ et $z_B = -1 + e^{i\alpha}$

a) Vérifier que $z_A = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_B = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

b) Dédurre que le triangle OAB est un triangle rectangle en O.

c) Déterminer la valeur de α tel que : OAB soit isocèle en O.

Exercice n°2 : 6 points

On considère dans l'ensemble nombres complexes l'équation

(E) : $z^3 - 2(1+i)z^2 + (2+4i)z - 4i = 0$.

1) a- Vérifier que $2i$ est une racine de (E).

b- résoudre alors l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère A et B

les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.

A tout complexe z différent de z_A on associe le complexe $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$

Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

a- Montrer que $B \in (E)$.

b- Déterminer l'ensemble (E).

c- Montrer que $|z'| = \frac{BM}{AM}$ et déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3) Soit n un entier naturel. On considère les points A_n d'affixe $(1+i)^n$.

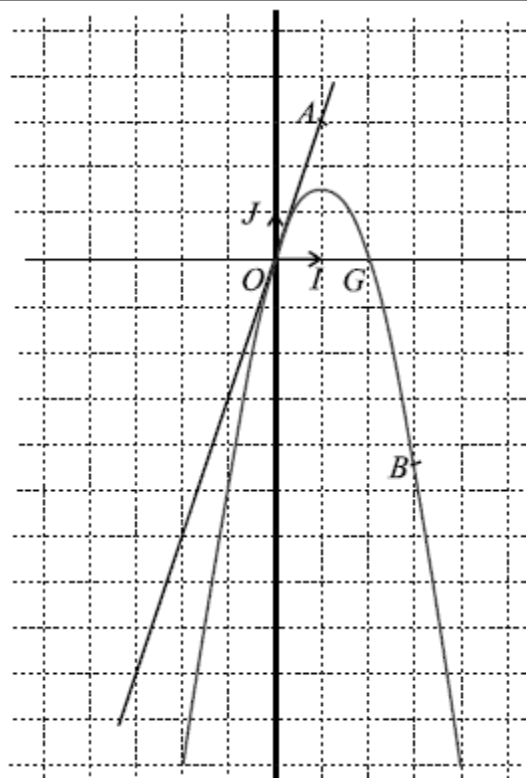
a- Donner la forme exponentielle de $(1+i)^n$.

b- Pour quelles valeurs de n , les points A_n sont situés sur l'axe des réels?

Exercice n°3 : 4 points

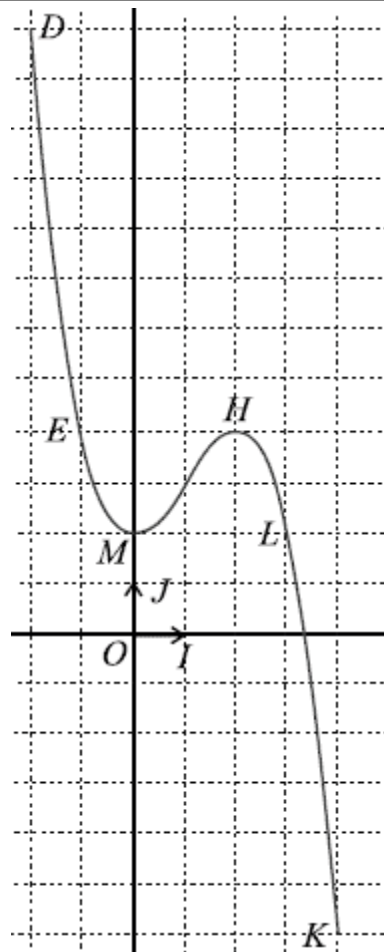
Soient f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et tel que $g' = f$. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f .



On précise que $B(3 ; -4,5)$ et $G(2 ; 0)$ sont des points de la courbe (C) et que la droite (OA) est tangente en O à la courbe (C) où $A(1 ; 3)$.

La courbe (Γ) ci-dessous est la courbe Représentative de la fonction g .



On précise que les points $D(-2 ; 12)$; $E(-1 ; 4)$; $M(0 ; 2)$; $H(2 ; 4)$; $K(4 ; -6)$; $L(3 ; 2)$ sont des points de la courbe (Γ).

1) Répondre par vrai ou faux sans justification chacune des affirmations suivantes :

a- $f'(0) = -3$.

b- $g'(2) = 0$.

c- La fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

d- La fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

e- Le coefficient directeur de la tangente en L à la courbe (Γ) est -4.

f- Le point de coordonnées $(1, 3)$ est un point d'inflexion à la courbe (Γ).

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

3) Donner une équation de la tangente à la courbe (Γ) en son point L.

Exercice n°4 : 5 points

On considère une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f(x)	4	1	$+\infty$	0	-2

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) a) Interpréter, graphiquement, chaque limite de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet dans $\mathbb{R} - \{2\}$ une solution unique.

c) Tracer une allure possible de C.

d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f(x)} & \text{si } x \neq 2 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 2.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de g.