

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux

1) On considère les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) vérifiant :

$$\otimes x_n \leq y_n \leq z_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \otimes \lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = -1 \quad \otimes \lim_{x \rightarrow +\infty} z_n = 1$$

a) $\lim_{+\infty} y_n = 0$.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$; $-1 \leq y_n \leq 1$.

c) on ne sait pas si la suite (y_n) a une limite.

2) Soient les suites (u_n) et (w_n) définies par :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_0 = 1,5$; $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $w_n = u_n - 1$

a) La suite (w_n) est une suite géométrique.

b) La suite (w_n) est une suite majorée.

c) La suite (u_n) converge vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites d'équations : $y = x$ et $y = 2x - 1$

Exercice 2 : (7 points)

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1}$ et $u_0 > 0$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.

En déduire la monotonie de u (on calculera $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).

2) La suite est-elle convergente et calculer sa limite éventuelle ?

3) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$ puis que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$.

Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un ROND (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$, A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$.

1) Représenter les points I , A , B et le cercle \mathcal{C} .

2) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle \mathcal{C} et calculer son rayon.

3) Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i}$.

a) Ecrire z_D sous forme algébrique.

b) Montrer que $D \in \mathcal{C}$

Exercice 4 : (6 points)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + (1 - 3i)z - 3i = 0$

2) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives (-1) , $3i$, $2 - i$ et $\frac{1}{2}i$.

Soit l'application $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P$, $M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{3 + iz}{z + 1}$.

a) Vérifier que $f(D) = C$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC .

c) Montrer que pour $z \neq 1$ on a $|z'| = \frac{BM}{AM}$. En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.

d) Déterminer l'ensemble γ des points z tel que z' est réel.

Exercice 1 :

1) a) faux b) faux c) vrai 1,5

2) a) vrai b) faux c) faux 1,5

Exercice 2 :

1) $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 - u_n}{3u_n + 1} \neq Cste$ donc $u_n \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow (u_n)$ existe. 0,5

▪ $u_n > 0$ (récurrence). 1

▪ $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 - u_n}{3u_n + 1} < 0$ car $u_n > 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{3u_n + 1} < 1$ donc $(u_n) \searrow$. 1

2) (u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge. 0,5

▪ on pose $f(x) = \frac{x^2}{3x + 1}$ continue sur $[0, +\infty[$; $f(u_n) = u_{n+1}$ 1

(u_n) converge vers $\ell \in [0, +\infty[$ on a :

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 2\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$ (à rejeter) donc $\lim u_n = 0$.

3) $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n \left(3 + \frac{1}{u_n}\right)} = \frac{u_n}{3 + \frac{1}{u_n}} \leq \frac{u_n}{3}$ ou $u_{n+1} - \frac{u_n}{3} = \frac{-u_n}{3u_n + 3} < 0$ d'où $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$. 1

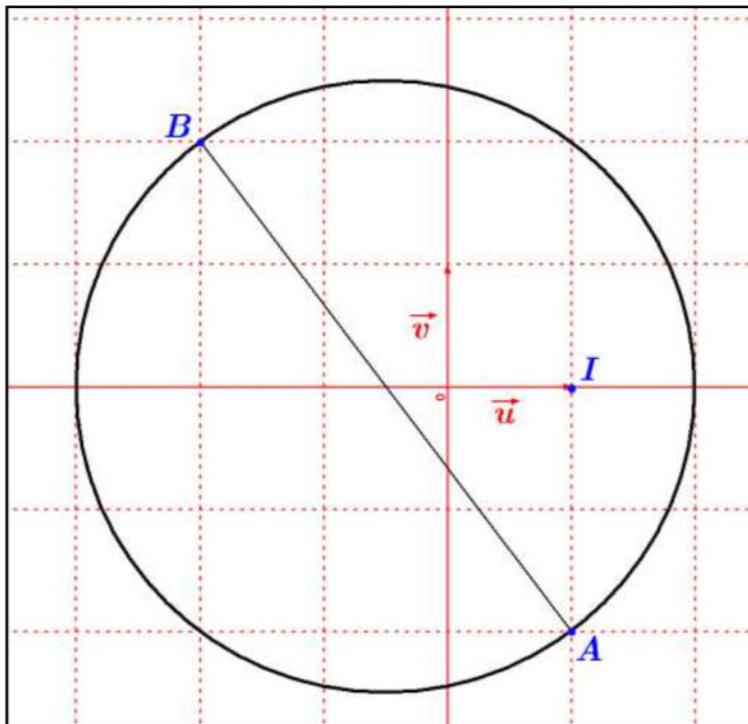
▪ vérifions pour $n = 0$; $u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0 u_0$ vrai, supposons $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$, $n \in \mathbb{N}$ montrons que

$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u_0$, on a $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u_0$. 1

▪ $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$ donc $\lim u_n = 0$. 1

Exercice 3 :

1)



1

$$2) \Omega = A * B ; z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2} ; r = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} |z_B - z_A| = \frac{5}{2}. \quad \boxed{0,5} \quad \boxed{0,5}$$

$$3) a) z_D = \frac{3 + 3i}{2}. \quad \boxed{1}$$

$$b) \Omega D = |z_D - z_{\Omega}| = \frac{5}{2} \Rightarrow D \in \mathcal{C}. \quad \boxed{1}$$

Exercice 4 :

$$1) z^2 + (1 - 3i)z - 3i = 0 ; a - b + c = 0 ; z_1 = -1 ; z_2 = 3i ; S_C = \{-1, 3i\}. \quad \boxed{1}$$

$$2) a) z_D = \frac{1}{2}i ; f(D) = \frac{3 + i\left(\frac{1}{2}i\right)}{\frac{1}{2}i + 1} = 2 - i \text{ donc } f(D) = C. \quad \boxed{1}$$

$$b) AB = \sqrt{10} ; AC = \sqrt{10} ; BC = \sqrt{20} \text{ } ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle.} \quad \boxed{1}$$

$$c) |z'| = \frac{\left| i \left(z + \frac{3}{i} \right) \right|}{|z + 1|} = \frac{|z - 3i|}{|z + 1|} = \frac{BM}{AM} \quad \boxed{1}$$

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow BM = AM \text{ l'ensemble des points } M(z) \text{ est la médiatrice } [AB]. \quad \boxed{1}$$

$$d) M \in \gamma \Leftrightarrow \bar{z}' = z \quad z \neq -1 ; \text{ on a } \left(\frac{3 - i\bar{z}}{\bar{z} + 1} \right) = \left(\frac{3 + iz}{z + 1} \right) \Leftrightarrow -2iz\bar{z} + 3(z - \bar{z}) - i(\bar{z} + z) = 0$$

$$\text{on pose } z = x + iy \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} ; -2i(x^2 + y^2) + 6iy - 2ix = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y - x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{10}{4}$$

$$\text{d'où } \gamma = \mathcal{C} \left(I \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), \frac{\sqrt{10}}{2} \right) \setminus \{A\} \quad \boxed{1}$$