Lycée secondaire : 18 / 01 / 52 Djebeniana : 12 / 11 / 2008	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°1** (MATHÉMATIQUES)	**Prof : ABID HASSEN** **section:4ème année sc info 1& 2** **Durée : 2 heures**

EXERCICE N°1 : (3 points)

Q.C.M . Trouver la seule bonne réponse.

1) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = (-\frac{3}{4})$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ c) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

2) la forme algébrique de $(2-3i)^2$ est :

a) $5 - 12i$ b) $-5 + 12i$ c) $-5 - 12i$

3) L'image de l'intervalle $[-1, 4]$ par la fonction $x \to x^2$ est

a) $[0 , 4]$ b) $[-1, 4]$ c) $[1 , 4]$

EXERCICE N°2 : (7 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $-1 < U_n < 3$.
   b – Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   c – En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

2) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$
   a – Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   b – Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

3) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :$U_n \geq 1$
   b – Vérifier que $3 - U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n + 2}(3 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c – En déduire que $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(3 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   d – Montrer que $3 - U_n \leq \dfrac{1}{3^n}(3 - U_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   e – Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos \pi x}{1 - x} & \text{si } x \in]-\infty , 0[\\ f(x) = x^3 - 12x + 1 & \text{si } x \in [0 , 2[\\ f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \in [2 , +\infty[\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a – Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $\dfrac{1}{x-1}$ £ f(x) £ $\dfrac{1}{1-x}$.
   b – Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3) a – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]0, 1[$.
   b – déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

Tournez la page s.v.p

EXERCICE N°4 : (5 points)

1) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A ,B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$ et $2i$

Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0$.

3) Soit $p(x) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$

a) Vérifier que $p(2i) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $p(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation $p(z) = 0$