Lycée Sidi Bouzid Professeur : Aloui Fahem

Date : 16/12/2020 Classe : 4ième

Devoir de Synthèse N°1

Durée : 2 Heures

EXERCICE N°1 : (*03 points*)

Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\frac{\pi}{3}}$

1°. Ecrire z sous forme algébrique puis calculer son module .

2°. Montrer que $z = 2(\cos\frac{\pi}{12})\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

3°. En déduire la valeur exacte de $\cos^2(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE N°2 : (*06 points*)

1°. a/ Prouver que $(3+i\sqrt{3})^2 = 6+6i\sqrt{3}$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l équation : $z^2 + (5-i\sqrt{3})z + 4 - 4i\sqrt{3} = 0$.

2°. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -4$, $z_B = -1+i\sqrt{3}$ et $z_C = -i\,z_B$.

a/ Calculer $|z_B|$, $|z_C|$ et déterminer la forme cartésienne de $\frac{z_B}{z_C}$.

b/ En déduire la nature du triangle OBC .

3°. Soit D le point d'affixe $z_D = (1-i)\,z_B$.

a/ Montrer que le quadrilatère OCDB est un carré .

b/ Montrer que $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{3}\,z_C$.

c/ En déduire que les points A , B et D sont alignés .

EXERCICE N°3 : (*06 points*)

Soit la fonction f définie sur IR_+ par : $f(x) = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$.

1°. a/ Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,2[$.

2°. a/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 1 et préciser l'intervalle sur lequel elle est derivable .

b/ Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

3°. Déterminer pour tout $x \in [1,2[$ l'expression de $f^{-1}(x)$.

EXERCICE N°4 : (*05 points*)

Soit la fonction g définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1°. Dresser le tableau de variation de g .

2°. Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

3°. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour $x \in J\setminus\{1\}$.