Lycée :02/03/1934	Devoir synthèse n°1 (2019-2020)	Classe :4ème
Hedi Ben Hassen	Mathématiques	Durée : 2heures

Exercice1 (5pts)

On considère dans £   l'équation(E) : $z^2 - 7e^{i\frac{\pi}{3}}z + 10e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0$ les nombres complexes $h = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$

1)a)Montrer que h est une solution de (E).En déduire l'autre solution .

b) Déterminer les racines carrées de h et b

2) Résoudre dans £ l'équation $z^4 - 7e^{i\frac{\pi}{3}}z^2 + 10e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0$

3) On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points B, C et D d'affixes respectives : $z_B = b$ $z_C = be^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_D = be^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

a) Calculer z^3_C et z^3_D

b) En déduire que le triangle BCD est équilatéral.

Exercice2 (5pts)

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A et B d'affixes respectives p= 2i et $q = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) Soit (E) l'équation dans £   tel que (E) : $2z^2 + 2qz + p + 2 = 0$

a)Ecrire p et q sous forme exponentielle

b) Vérifier que $q^2 = 2p$

c)Résoudre dans l'équation (E)

2) Soit C le point d'affixe c= q – p.

a)Montrer que OABC est un parallélogramme.

b) Construire les points A, B et C .

3)a)Montrer que $c = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{i\frac{\pi}{4}})$

b) En déduire la forme exponentielle de c.

Exercice (6pts)

Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ .On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté a un repère orthonormé

1)a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)}{x-2} = +\infty$. Interpréter les résultats graphiquement

b) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

c) Montrer que f est une bijection de $[2, +\infty[$ sur [0;1[

2) On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (C') sa représentation graphique.

a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur [0;1 [.

b) Vérifier que le point $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, 4) \in$ (C') c)Soit T la tangente a (C') au point A .Montrer que T a pour équation $y=8\sqrt{3}x-8$ et passe par $B(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$

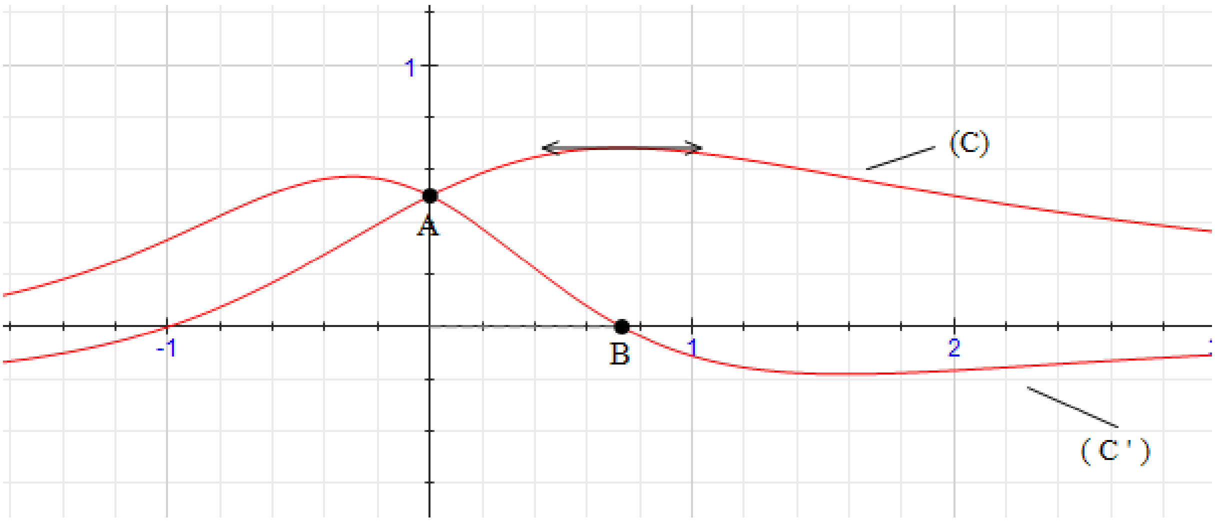
3) Dans l'annexe ci-jointe (C) la courbe représentative de f, la droite D : y=x et le point B.
Tracer (C') et T.

Exercice4 (4pts)

Dans la figure ci-dessous(C) et (C') les représentations graphiques d'une fonction f dérivable sur IR et sa fonction dérivée tel que ; $f(\sqrt{3}-1) < \sqrt{3}-1$.

-(C) et (C') Passent par le point A $(0,\frac{1}{2})$.

- (C') coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse $\sqrt{3}-1$.



1) Justifier que (C) et (C') sont les courbe respectives de f et f ' .

2)a)Dresser le tableau de variation de f ' sur $\left[0\ ,\ \sqrt{3}-1\right]$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0\ ,\ \sqrt{3}-1\right]$ on a : $|f\ '(x)| \leq \frac{1}{2}$

3)a)Montrer que l'équation f(x) =x admet une unique solution α dans $\left[0\ ,\ \sqrt{3}-1\right]$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0\ ,\ \sqrt{3}-1\right]$ on a $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x\ -\alpha|$

Annexe

Nom et Prénom :……………………………………………………………………………………