REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Niveau : 4ème année

MATHEMATIQUES — 2 heures

Lycée Radhia Hadded
ANIS BEN ALI
Décembre 2019

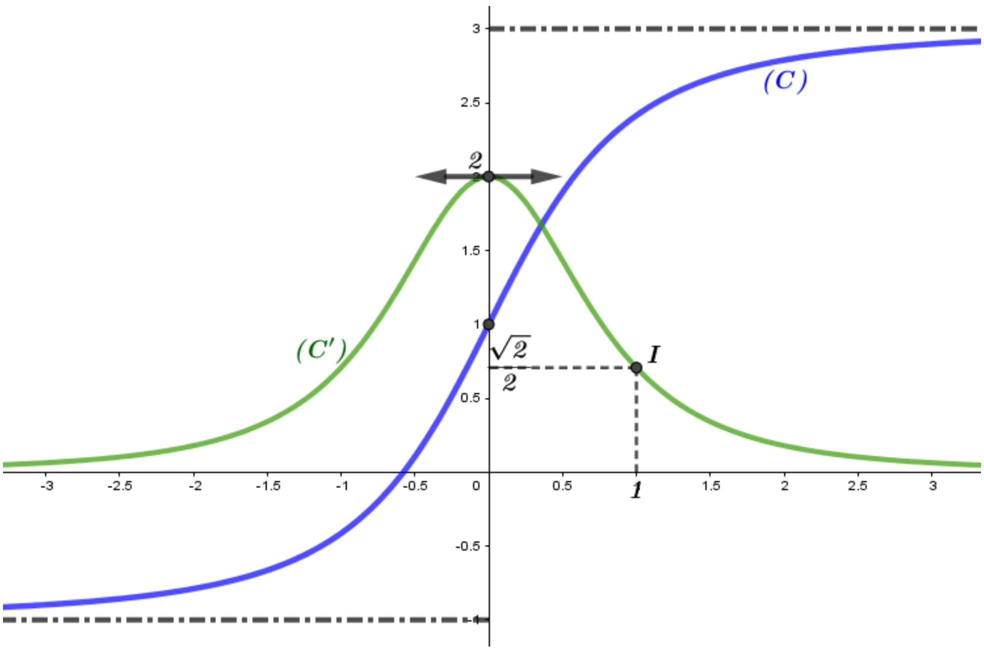
<u>Le sujet comporte des pages numérotées de (1 sur 4) à (4 sur 4). La page (4 sur 4) est à rendre avec la copie</u>

EXERCICE N°1 : (7 points)

Soit f une fonction définie, continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les courbes (C) et (C') de la fonction f et celle de sa dérivée f'.

- Les droites $y=-1$ et $y=3$ sont des asymptotes de (C) et la droite $y=0$ est une asymptote de (C').
- La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale et la courbe (C') admet une seule tangente horizontale.
- Le point $I\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartenant à (C').



I) Utiliser le graphique pour répondre.

1) a) Justifier que (C) est la courbe de f.

b) Montrer que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de (C).

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en A.

d) Tracer (T) dans **l'annexe 1** de la page 4.

e) Justifier que pour tout $x\in[1,3]$, $f'(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in[2,3]$.

II) La fonction f est définie par $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ et dont on a représenté la restriction à l'intervalle $[0,\alpha]$ ainsi que la droite $\Delta : y=x$. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1+\dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}=f(u_n);n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) Représenter dans **l'annexe 2** (page 4) les trois premiers termes de la suite u et conjecturer quant à la monotonie de cette suite.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\le u_n\le\alpha$.

3) En utilisant la position de (C) par rapport à Δ, montrer que (u_n) est croissante.

4) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) **a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\le 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

c) Retrouver la limite de (u_n).

d) A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|u_p-\alpha|\le 10^{-2}$.

(On rappelle que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-2} près)

EXERCICE N°2 : (6.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit m un nombre complexe de module 1 et tel que $\arg m\equiv\theta[2\pi]$ où $\theta\in]-\pi;\pi]$.

1°) On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m): \overline{m}z^2-(1+\overline{m})z+2(1-m)=0$

a) Montrer que le discriminant Δ_m de l'équation (E_m) est égal à $(\overline{m}-3)^2$.

b) Résoudre l'équation (E_m).

(on notera Z_1 la solution de module 2 et Z_2 l'autre solution) puis vérifier que $Z_1=2m$ et $Z_2=1-m$.

2°) On considère le point M d'affixe Z_1. Quel est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$.

3°) Dans cette question, on prendra $m=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): z^3=Z_1=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) On a tracé sur le graphique au-dessous la courbe $\Gamma : y=x^3$ pour $x\ge 0$.

Construire alors, sur le même graphique **(l'annexe 3)**, les points images de toutes les solutions de (E').

4°) Dans cette question, on prendra $m=e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Vérifier que $Z_2=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E''): e^{-i\frac{\pi}{3}}z^4-\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)z^2+2\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=0$.

c) Vérifier que les images des solutions de (E'') sont les sommets d'un parallélogramme.

EXERCICE N°3 : (3.5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) *définies par* $u_0 = 2019$ *et* $v_0 = 2021$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1°) *a)* *Montrer que la suite* $w_n = v_n - u_n$ *est géométrique.*

b) *En déduire que* $v_n \geq u_n$.

c) *Montrer que les suites* (u_n) et (v_n) *convergent vers la même limite* ℓ .

2°) *a)* *Montrer que la suite* $t_n = u_n + v_n$ *est constante.*

b) *En déduire la valeur de* ℓ .

EXERCICE N°4 : (3 points)

Soit f une fonction dérivable sur $[-4,6]$ *et telle que sa dérivée f' est continue sur* $[-4,6]$.

On donne le tableau de variation de sa ***fonction dérivée.***

x	-4		0		2		6
$f'(x)$	**-3**	↘	**-5**	↗	**4**	↘	**-1**

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant la réponse

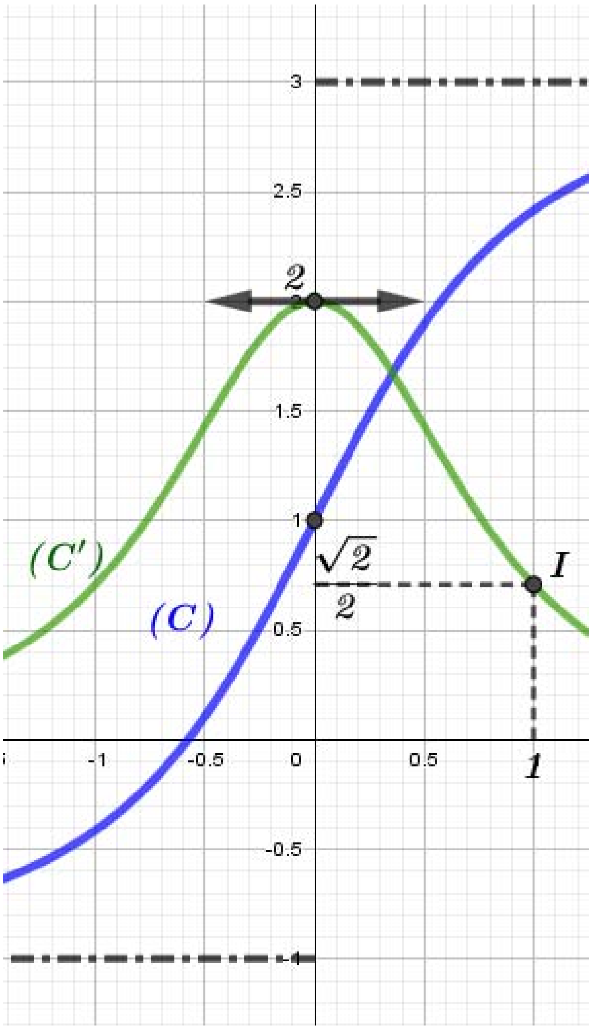
1°) *Il existe exactement une tangente à* (C_f) *parallèle à la droite* $y = -2x$.

2°) *Il existe une unique tangente horizontale à* (C_f)

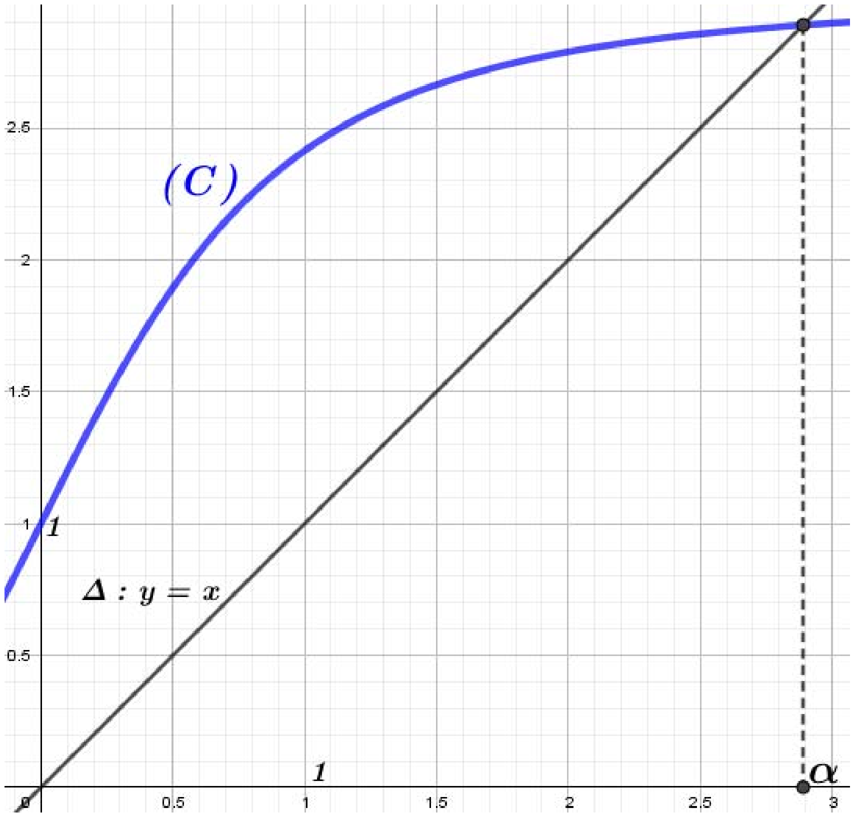
3°) On a $-10 \leq f(2) - f(0) \leq 8$.

4°) *La suite U définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $U_n = f'\left(\frac{1}{n}\right)$ *est croissante.*

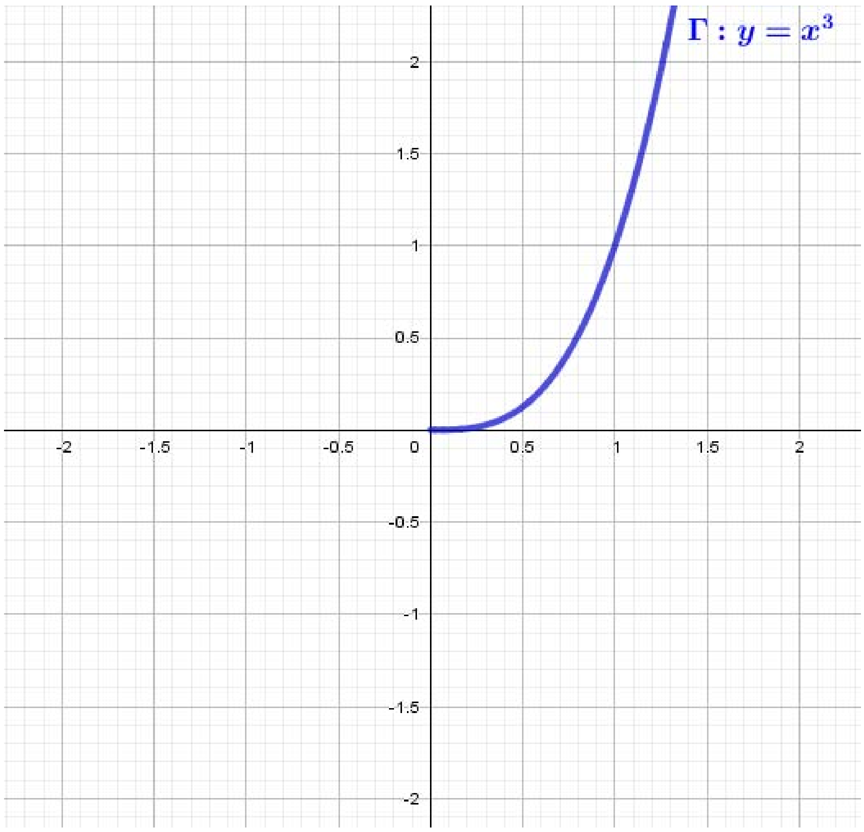
Nom et prénom ………………………………………………………Classe ………………………………………………



l'annexe 1



l'annexe 2



l'annexe 3