	TYPE D'EVALUATION :	NIVEAU & SECTION
	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	4ème
	COMPOSITION DE : MATHEMATIQUES	DATE : 5 Décembre 2019
ETABLISSEMENT :	DUREE DE L'EPREUVE :	ENSEIGNANT :
LYCEE 9 avril 1938 Boumhel ANNEE SCOLAIRE : 2019-2020	2h | COEF : 3	HOUSSEM EDDINE FITATI

AUTORISATIONS :

Calculatrice scientifique : Oui ~~Non~~

SUJET :

Exercice n°1 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[1+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que f est dérivable sur $]1+\infty[$ et que pour tout $x>1$, $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ g(0)=1 \end{cases}$.

   a. Justifier l'existence de la fonction g sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b. Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   c. Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=\dfrac{-1}{1+\sin x}$.

   d. Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $-1\le g(x)\le -\dfrac{1}{2}$.

   e. Montrer que pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $1-x\le g(x)\le 1-\dfrac{1}{2}x$.

Exercice n°2 : (5 points)

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E_\theta): z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$ avec $\theta\in]0,\pi[$.

1. a- Montrer que : $1+2i\sin\theta e^{i\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^2$.

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).
2. Soit $f(z)=z^3-4z^2+2\left(2-i\sin\theta e^{i\theta}\right)z+4i\sin\theta e^{i\theta}$.

   a. Calculer $f(2)$.

b. Vérifier que $f(z)=(z-2)(z^2+bz+c)$ où b et c sont deux nombres complexes à déterminer.

c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, $f(z)=0$.

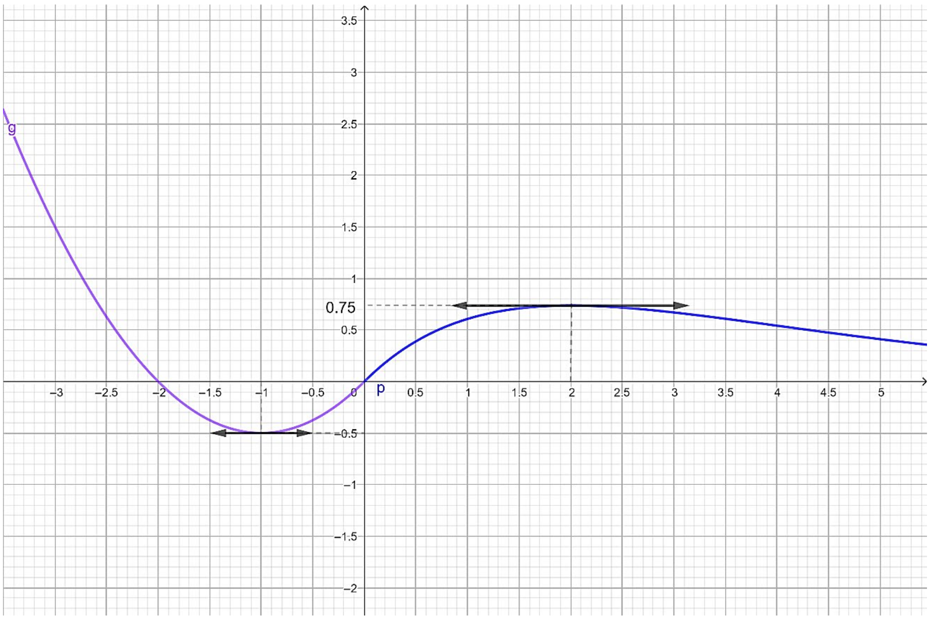
3. Le plan étant rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On désigne par A,B et C les points d'affixes : $2,\ 1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$.

a. Montrer que :$OBAC$ est un rectangle.

b. Déterminer θ pour que $OBAC$ soit un carré.

Exercice 3 : (6 points)



Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2)=2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La courbe (C') ci-dessus est celle de la fonction dérivée f' de f dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

L'axe des abscisses est une asymptote à (C').

1. **a-** Etudier la monotonie de f .
b- Etudier la monotonie de f'.

2. Montrer que (C_f) admet exactement deux points d'inflexions dont on précisera les abscisses.

3. Montrer que (C_f) admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Montrer que la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2 passe par le point $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Montrer que l'équation : $f''(x)=\dfrac{3}{16}$ admet au moins une solution dans $\left]-2,2\right[$.

6. Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0=\dfrac{5}{2} \\ U_{n+1}=f\left(U_n\right) \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$

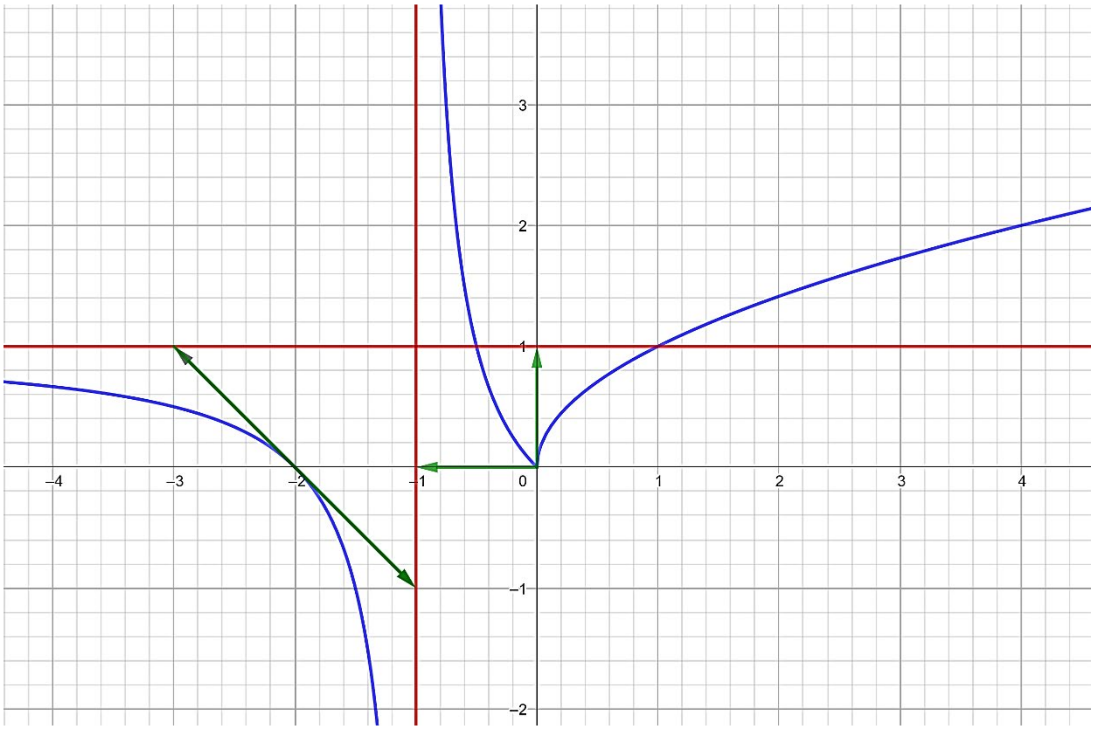
a. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $U_n\geq 2$,

b. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $\left|U_{n+1}-2\right|\leq\dfrac{3}{4}\left|U_n-2\right|$.

c. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $\left|U_n-2\right|\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

d. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$.

Exercice 4 : (4 points)



Dans la figure ci-dessus on a la représentation graphique d'une fonction f ayant la droite $y = 1$ comme asymptote horizontale au voisinage de (-∞), la droite x =-1 comme asymptote verticale et une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses : -2 et 0.

1. a. Donner chacune des limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{f(x)-1}$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1}$

   b. Déterminer : $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$

   c. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2.

2. On considère les fonctions : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $h(x) = f^2(x)$ et $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

   a. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions : g ,h et k.

   b. Déterminer l'ensemble sur lequel k et dérivable.

   c. Montrer que : $g'(1) = -\frac{1}{2}$

   d. Dresser le tableau de variation de h.

Bon travail