

Exercice n°1 (5 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1,1,2), B(1,-1,-2), C(2,-1,3) et D(2,2,2).

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
b) Calculer la distance du point C à la droite (AB).
c) Vérifier que $AC = d(C, (AB))$ puis déduire la nature du triangle ABC.
d) Déterminer l'aire du triangle ABC.
- 2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
c) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Calculer DH.
- 3) Soit le point E $(2, 2+3\alpha, 2-\alpha)$ où α est un réel.
a) Vérifier que E appartient à la droite (DC)
b) Déterminer α pour que E soit le projeté orthogonale de A sur (DC)

Exercice n°2 : (7 points)

1) Soit l'équation (E): $Z^2 - \sqrt{5}(1+i)Z + 5i = 0$

- a) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
- b) Déterminer l'autre solution de (E) sous forme exponentielle.
- c) Déduire les solutions de l'équation (E') : $Z^4 - \sqrt{5}(1+i)Z^2 + 5i = 0$
(On admet que $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité 2 cm)

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = \sqrt{5}$, $Z_B = -1+2i$ et $Z_C = i\sqrt{5}$

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$.

- a) Placer le point B dans le repère.
 - b) Montrer que B appartient au cercle (C).
 - c) Construire le cercle (C) puis placer les points A et C.
- 3) a) Montrer que le triangle OAC est isocèle et rectangle en O.
b) Déterminer l'affixe du point D pour que OADC soit un carré.
c) Vérifier que $Z_D = \sqrt{10} e^{i\frac{\pi}{4}}$
- 4) La droite (OD) coupe le cercle de (C) en deux points E et E'.
a) Déterminer graphiquement l'affixe des points E et E' en justifiant votre réponse.
b) Vérifier que Z_E et $Z_{E'}$ sont deux racines quatrièmes de -25.
- 5) Soit F et F' les points d'affixes les deux autres racines quatrièmes de -25.
a) Quelle est la nature du quadrilatère du sommets E, E', F et F'.
b) Construire F et F' puis déterminer graphiquement leurs affixes.

Exercice n°3 (8 points)

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 1.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α puis vérifier que $1 \leq \alpha \leq 2$.

3) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$

c) En déduire que : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

d) Déduire la limite de la suite U.

5) Soit la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f(\tan x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ puis calculer $g'(x)$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[: g(x) = \frac{1}{\sin x}$

c) Dresser le tableau de variation de g.

Bon travail