

Mr : KSAIER Mr : B rhouma	REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	DATE : 24/01/2018
LYCEE : 2MARS KORBA	DEVOIR DE SYNTHESE °N1	NIVEAU : 4 ^{em}
DUREE : 2 HEURS	EPREUVE : MATHEMATIQUE	COFFICIENT 3

EXERCICE N°1 (4 points)

La courbe ζf dans l'annexe jointe représentée dans un repère orthonormé direct $R(O; \vec{i}; \vec{j})$ représente une fonction f définie strictement croissante sur \mathbb{R} . Les droites $\Delta: y = \frac{5}{2}$ et $\Delta': y = -\frac{5}{2}$ sont des asymptotes à ζf

1) Déterminer graphiquement

a) $f(0)$; $f'(0)$

b) Déterminer le tableau des variations de f

c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera

d) Déterminer $f^{-1}(0)$; $(f^{-1})'(0)$

e) Tracer la courbe de ζf^{-1} sur la copie à rendre

2) Sachant que $g(x) = \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}}$ est la restriction de f sur $[0; +\infty[$

Montrer que : $g'(x) = \frac{5}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3) a) Soit A un point de ζf d'abscisse 1. Déterminer les coordonnées de A

b) Dédire $(g^{-1})'(\frac{5}{2\sqrt{2}})$

4) Montrer que $g^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{25-4x^2}}$

EXERCICE N°2 (6 points)

Soit $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ une fonction définie sur $]0; +\infty[$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

2) Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$. vérifie que $\alpha \in [1; 2]$

3) Montrer que pour tout $x \in]1; 2[$; $|f'(x)| < \frac{3}{4}$

4) a) Soit (u_n) une suite tel que $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que $1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| < (\frac{3}{4})^n$

5) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°3 (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; -1)$; $B(-1; 0; 2)$; $C(0; 1; -1)$ et $D(2; 0; 1)$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Dédire que A ; B et C sont trois points non alignés

- c) Déduire que l'équation cartésienne du plan P qui passe par A ; B et C est donner par

$$P: x - y + 1 = 0$$
- d) Calculer l'air du triangle ABC
- 2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD)
 b) Etudier la position relative de la droite (AD) et le plan P
 c) Calculer le volume de tétraèdre DABC
- 4) Soit H le projeté orthogonal de D sur P
 a) Calculer DH
 b) Ecrire une équation paramétrique de la droite (DH)
 c) Déterminer les coordonnées de H

EXERCICE N°4 (4 points)

- 1) Vérifier que $(-1 + 3i)^2 = -8 - 6i$
- 2) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 6i)z + 3 - 4i = 0$
 a) Montrer que $z_0 = i$ est une solution de l'équation (E)
 b) Ecrire l'équation (E) sous la forme $(E): (z - i)(z^2 + bz + c) = 0$ ou b et c sont deux nombres complexes à déterminer
 c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)
- 3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $R(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A ; B et C d'affixes respectives, $a = i$; $b = 1 + 2i$ et $c = 2 - i$
 Montrer que : ABC est un triangle rectangle en A

Nom.....& PrénomClasse

Annexe à rendre avec la copie

