

Exercice N .01(06 points)

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R}^* \text{ par : } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \\ \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(\frac{2}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par (ξ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) a- Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2} - 1$

b- En déduire que f est continue à gauche en 1.

2) Calculer $\lim_{-\infty} f$, $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{1^+} f$

Interpréter graphiquement les résultats.

3) a- Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-2}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

b- Dresser le tableau de variation de f sur $]1, +\infty[$.

4) Soit g la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a- Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b- Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{-2 \cos x}{\sin^2 x}$

c- Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \frac{2}{\sin x}$

5) a- Montrer que l'équation $g(x) = 2x$ admet une unique solution $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$

b- Montrer que pour tout réel $x \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$, $|g'(x)| \leq 4\sqrt{3}$

c- En déduire que pour tout réel $x \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\left| \frac{1}{\sin x} - \alpha \right| \leq 2\sqrt{3}|x - \alpha|$

Exercice N .02(07 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- Calculer le volume V du tétraèdre $ABCI$

2) On désigne par P le plan (ABC) .

Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x + y + 2z - 4 = 0$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 8 = 0.$$

a- Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

b- Montrer que $P \cap (S)$ est un cercle ζ de rayon $\sqrt{5}$.

c- Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle ζ .

4) Soit a un réel et M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$

a- Déterminer à l'aide du réel a , les coordonnées du point M .

b- Montrer que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = (a-1)(11a+3)$

c- En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle ζ au point E définie par $\overrightarrow{AE} = \frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$

d- Montrer que le volume V' du tétraèdre $AECI$ est égale à $\frac{3}{11}V$.

Exercice N .03(07 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$

a- Etudier les variations de g .

b- Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a- Montrer que f est dérivable à droite en 0.

b- Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

c- Montrer que $f'(x) \geq 0 \forall x \leq 1$ et que $f'(x) \leq 0 \forall x \geq 1$

d- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α

et que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

3) a- Déterminer une équation cartésienne de Δ la tangente à (ζ) au point O .

b- Etudier la position relative de (ζ) par rapport à Δ et Tracer Δ et (ζ)