

Le Mercredi 31/10/2018

MATHEMATIQUES

Durée : 2 H

Mr Bechir Fehri

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. L'élève doit indiquer sur sa copie, avec justification, le numéro de la question et la lettre convenable à la réponse choisie.

Une réponse correcte et justifiée vaut 0.75 point, une réponse correcte et non justifiée vaut 0.25 point et une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2(1 - \sin \frac{1}{x^2})$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
 a) $+\infty$ b) 0 c) 1
- 2) $1+i$ est une racine quatrième de :
 a) -4 b) 4 c) $4i$
- 3) Si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ alors $\arg(i\bar{z}) \equiv$
 a) $\frac{\pi}{6} [2\pi]$ b) $-\frac{\pi}{6} [2\pi]$ c) $\frac{\pi}{3} [2\pi]$
- 4) L'équation $z^2 = (\bar{z})^2$ admet dans $\mathbb{C}$
 a) Une seule racine b) deux racines distincts c) une infinité de racines

Exercice 2 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par : $f(x) = x-1 + \sqrt{x+2}$.

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[-2, +\infty[$.
 b) montrer que f est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$.
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1, 0[$ une unique solution α .
 b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 3) donner le signe de $f(x)$ sur $[-1, 0]$.
- 4) a) Montrer que : $\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$
 b) En déduire la valeur exacte de α .
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(x^2(1 - \cos \frac{\pi}{x})\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f\left(\frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-1}\right)$

Exercice 3 : (7 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

- 1) a) Vérifier que : $(-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
b) Résoudre l'équation (E)
- 2) Pour tout Z dans $\mathbb{C}$, on pose $p(Z) = Z^3 - (\sqrt{3} + 5i)Z^2 - 4(2 - i\sqrt{3})Z + 4(\sqrt{3} + i)$
 - a) Calculer $p(2i)$
 - b) Trouver les nombres complexes α et β tel que : pour tout Z dans $\mathbb{C}$ on a $p(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + \alpha Z + \beta)$
 - c) Résoudre l'équation $p(Z) = 0$
- 3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2i$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = \sqrt{3} + 3i$
 - a) Donner l'écriture exponentielle de a et b . En déduire la construction des points A, B et C
 - b) Donner l'écriture exponentielle de c et $\frac{c-a}{b-a}$.
 - c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
- 4) a) Vérifier que : $b = c - a$
b) en déduire que le quadrilatère OBCA est un losange.

Exercice 4 : (4 points)

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes non nuls et non réels tels que : $Z_1 \times Z_2 = 1$ et $|Z_1 - Z_2| = 2$. Soit r le module de Z_1 et θ un argument de Z_1 . On suppose que $r \geq 1$ et $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1 , 1 , Z_1 et Z_2

- 1) a) Donner l'écriture exponentielle de Z_2 .
b) Montrer que : $|Z_1 - Z_2|^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\theta$
c) Déduire que : $r - \frac{1}{r} = 2 \cos \theta$
- 2) Calculer les distances AM_2 et BM_1 .
- 3) Montrer que : $(AM_1) \parallel (BM_2)$
- 4) Soit Δ une demi-droite d'origine O incluse dans le premier quadrant et M_1 un point de Δ . Déduire de ce qui précède une construction de M_2 .