DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Mathématiques
Janvier 2017

LYCEE IBN CHARAF *de* THALA
Professeur : *Hani* SAYHI

Classes : $4^{ème}$
Durée : $2heures$

Le devoir comporte 3 pages. La page 3/3 est à rendre avec la copie d'examen.

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1. a) Montrer que f est définie sur $[0;1[$
   b) Calculer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
2. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
   b) Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$, pour tout $x \in]0;1[$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. a) Calculer $f^{-1}(0)$.
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J^*.
   c) Calculer $(f^{-1})'(1)$.
   d) Expliciter $(f^{-1})(x)$, pour tout réel x de J.
5. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice n°2 :

Dans l'annexe ci-jointe, C_f est la courbe d'une fonction f définie sur IR qui a la droite une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Par une lecture graphique, déterminer :
   a) $f(3)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f'(3)$.
   b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-2}{x+1}$; $\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-2}{x+1}$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)+1}{x-1}$
2) a) Dresser le tableau de variation de f sur IR.
   b) Déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.
3) Soit g la restriction de f sur $[-3;-1]$
   a) Justifier que g est une bijection de $[-3;-1]$ sur un intervalle K à déterminer.
   b) Tracer avec une autre couleur la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} dans le même repère.

Exercice n°3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit S la sphère dont une équation cartésienne est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 19 = 0$$

1. Déterminer le centre I et le rayon de S.
2. Soit m un paramètre réel et P_m le plan d'équation : $x - 2y - 2z + m = 0$.
   a) Déterminer suivant les valeurs de m la position relative de P_m et S.
   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquels P_m et S sont sécants suivant un cercle de rayon 4.
   c) Montrer que $P_2 \cap S$ est un cercle (C) de centre $H(0;1;0)$.
3. Soit D la droite passant par $A(-4;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{k}$
   a) Calculer la distance $d(H, D)$.
   b) Montrer que D et P_m sont parallèles pour tout réel m.
   c) Déterminer la valeur de m pour que $D \subset P_m$
   d) En déduire la position de D et (C).

Exercice n°4 :

1) Résoudre dans C, l'équation : $z^2 - (1 + 3i)z - 4 = 0$.
2) On considère l'équation (E) : $z^3 - (1 + i)z^2 - (2i - 2)z - 8i = 0$.
   a) Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure qu'on notera z_0.
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 - (1 + i)z^2 - (2i - 2)z - 8i = (z + 2i)(z^2 + az + b)$$

   c) Résoudre alors (E) dans C.
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = -1 + i$, $Z_B = -2i$ et $Z_C = 2 + 2i$.
   a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A , Z_B et Z_C.
   b) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
   c) En déduire la nature du triangle ABC .
4) On considère les points E et D tels que $ABEC$ et $ABCD$ soient deux parallélogrammes.
   a) Déterminer Z_E et Z_D.
   b) Prouver que les points E , C et D sont alignés.

FEUILLE A RENDRE AVEC LA COPIE D'EXAMEN

Nom et Prénom : …………………………………………………………………………………………