

EXERCICE N° 1(5points)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z + 1 + \sqrt{3}i = 0$
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E') : $2Z^6 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0$
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$. Soit I le milieu de [AB]
 - a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B
 - b) Placer les points A, B, et I dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})
 - 4) a) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle
 - b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$
 - c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

EXERCICE N°2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

Soit les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -z_B$

- 1) a- Ecrire sous formes exponentielle z_A , z_B et z_C
 - b- Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle (ζ) de centre O et de rayon 2
 - c- Construire les points A, B et C
- 2) a- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A
 - b- Calculer l'aire du triangle ABC
- 3) Soit M un point du plan d'affixe $z_M = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ et S l'aire du triangle MBC
 - a- Vérifier que $M \in (\zeta)$ et justifier que le triangle MBC est rectangle en M
 - b- Montrer que $S = 2 \left| e^{2i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right|$
 - c- Vérifier que $e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})} (e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}) = e^{i2\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

d- En déduire que $S = 4 \left| \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right|$

4) Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale

EXERCICE N° 3 (4points)

1° Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[a, a+1]$

par $f(x) = \sqrt{x}$

a) Montrer que pour tout x de $[a, a+1]$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$

b) En déduire que pour tout x de $[a, a+1]$ on a

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (1)$$

2° Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$

a) Montrer en utilisant (1) , que $S_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} - 1 \leq S_n$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{S_n}$

3° Soit $t_n = S_n - \sqrt{n}$

a) Montrer que (t_n) est minorée

b) Montrer que (t_n) est décroissante

c) En déduire que (t_n) est convergente

EXERCICE N°4(6points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}$

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, interpréter graphiquement

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}}$

b- Dresser le tableau de variation de f

3) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f à chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$

a- Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera

b- Donner l'expression de $g_1^{-1}(x)$ et $g_2^{-1}(x)$

4) a- Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$

b- Calculer α_4 et β_4

5) On considère la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} \left(f(x) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que h est continue en 0

b- Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$