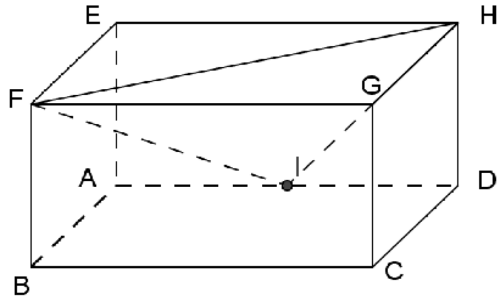
Lycée Nasrallah 30-12- 2016 Durée : 2 heures	DEVOIR DE SYNTHESE N°1 Mathématiques	Prof : Ben Taieb Lotfi Section : 4éme

Exercice1 (4 points)

La figure ci-dessous représente un parallélépipède rectangle tels que :

AB = 1, AD = 2 et I le milieu de [AD].

1) On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE})$
   a. Déterminer les coordonnées des points F, G, H et I.
   b. Montrer que le volume de tétraèdre GFHI est $V = \frac{1}{3}$
   c. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I
   d. En déduire la distance du point G au plan (FIH)



2) Soit $M(\propto ,2\propto,\propto)$ où $\propto$ est un réel différent de $\frac{1}{3}$
   a. Montrer que les points I, F, H et M ne sont pas coplanaires
   b. Calculer en fonction de $\propto$ le volume de tétraèdre IFHM
   c. Déterminer la position du point M pour que le volume du parallélépipède ABCDEFGH soit 6 fois du tétraèdre IFHM

Exercice2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ;\vec{u},\vec{v})$

On considère $\mathbb{C}$ dans l'équation (E) : $z^2 - 4z - 2\bar{z} + 8 = 0$

1) Vérifier que $\propto = 1 + i\sqrt{3}$ est une solution de (E)
2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2 ; $\propto$ et $\bar{\propto}$
   a. Vérifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle (ζ) dont on précisera le centre et le rayon
   b. Construire A, B et C
3) Soit D un point de (ζ) tel que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}) \equiv \theta[2\pi]$
   Placer le point E d'affixe $z_E = \propto e^{i\theta}$
4) Soient F et G les milieux respectives des segments [BD] et [CE]
   a. Justifier que $z_F = \frac{\propto}{2} + e^{i\theta}$ et $z_G = \frac{\propto e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$
   b. Montrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\propto}{2}$
   c. En déduire que le triangle AFG est équilatéral

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$

1/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur [0,2]

2/ La fonction f^{-1} est elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 2 ?

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur]0,2[

On **admet** que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

4/Soit $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$ pour tout x de [0,2]

a. Montrer que g est dérivable sur]0,2[et calculer g'(x) pour tout x de]0,2[
b. Calculer g(1). En déduire que pour tout x de]0,2[g(x) = 0
c. Interpréter le résultat obtenu

Exercice 4 (7 points)

Soit la fonction f définie sur] 0,1] par : $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

1) a. Calculer $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$ et interpréter le résultat obtenu

b. Montrer que f est dérivable sur] 0,1[et que $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

c. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter le résultat obtenu

d. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans **l'annexe**

2) a. Montrer que f réalise une bijection de]0,1[sur un intervalle J à préciser.

b. Montrer que pour tout x de J, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$

3) Sur **l'annexe** ci-jointe on a représenté les courbes C de f^{-1} et C' de sa dérivée seconde $(f^{-1})''$

Construire le point d'inflexion A de la courbe C ainsi la tangente T au point A.

4) Soit U la suite définie sur ℕ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

a. Montrer que pour tout n de ℕ, $0 \leq U_n \leq 1$

b. Montrer que pour tout n de ℕ, $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{5}|U_n - 1|$

c. En déduire que $|U_n - 1| \leq (\frac{2}{5})^n$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

5) Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$-\frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \leq S_n - (n+1) \leq \frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

b. Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$