Lycée	Feriana
Prof	Hamdi Mabrouk
Devoir	Mathématiques

Devoir de synthèse 1

Mathématiques

$4^{ème}$

Durée Durée :

22/12/2016

Exercice 1

Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1,2]$ vérifiant pour tout $x \in]-1,2[$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

1) **Il existe $\alpha \in]-1,2[$ tel que $3f'(\alpha) - 2f(2) + f(-1) = 0$.**
2) **Pour tout $x \in [-1,2]$: $|f(x) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|x|$.**
3) **On suppose de plus que f(-1)=0 et f(2)=1**

alors l'équation f(x)=x admet une unique solution $\beta \in]-1,2[$.

Exercice 2

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{u_n + 2}; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, on a : $1 \leq u_n < 3$

2) a)Montrer que (u_n) est une suite croissante.
b) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

4) Soit $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$, exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

1)a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ pour tout réel x .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point I(0,f(0)).

2) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par h(x)= $\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ h(0) = -1 \end{cases}$.

a) Montrer que h est continue sur $]-\infty, 0]$.

b) Montrer que $h'(x) = xf'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$

c) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ il existe $c \in]x, 0[$ tel que $\frac{h(x)+1}{x} = cf'(c)$.

d) En déduire que h est dérivable à gauche e 0 et calculer $h'_g(0)$.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z on pose $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$.
   a) Calculer P(1).
   b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.
   c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation P(z)=0.On note z_0 ;z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que :$Im(z_1) < Im(z_0) < Im(z_2)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = z_1 - i$ et $z_C = z_2 + 1$.

a)Vérifier que $z_B = 3-3i$ et que $z_C = 4+2i$, puis placer les points A, B et C dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3-3i$; on pose : $f(z) = \frac{z-4-2i}{z-3+3i}$

a)Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement le résultat .

b) Déterminer et construire Γ_1, l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c)Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur.

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$.

e)Vérifier que les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 passent par les points Aet D.