LYCEE SECONDAIRE BOUMERDES	4^{eme}
********	
DEVOIR DE SYNTHESE N°01	***EPREUVE : MATHEMATIQUES***
********	
PROF : F.ZAIED	***DUREE : 3H*** — ***DATE : 03/01/2016***

Exercice N°01 (2 pts)

On considère une fonction f deux fois dérivable sur ℝ et on désigne par (ζ_f) sa courbe dans un repère orthonormé . Dans le graphique ci – contre , on a representé la courbe $(\zeta'_{f'})$ de la fonction déeivée de f

- La droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à $\zeta'_{f'}$ en $+\infty$ et $-\infty$
- La courbe $\zeta'_{f'}$ admet une unique tangente horizontale au point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Répond par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) La courbe (ζ_f) admet exactement deux tangentes horizontales.

2) Il existe une tangente à (ζ_f) de coefficient directeur $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3) La courbe (ζ_f) admet un point d'inflexion.

4) $|f(2017) - f(2016)| \leq \frac{1}{2}$

Exercice N°02 (4 pts)

I) On considère l'équation dans ℂ . $(E) : z^2 - (2a+i)z + 2a^2 + ia - a = 0$ avec $a \in ℂ \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Résoudre dans ℂ l'équation (E)

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

A tout M d'affixes a on associe les points N et Q d'affixes $z_N = (1-i)a + i$ et $z_Q = (1+i)a$

Et soit I le point d'affixe $\frac{1+i}{2}$

1) a) Vérifier que : $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{IQ})}{\text{Aff}(\overrightarrow{IN})} = i$

b) En déduire que Q est l'image de N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) On suppose que M appartient au cercle $\zeta_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$.

a) Vérifier que $QN = 1$

b) En déduire que lorsque M varie sur $\zeta_{[AB]}$, les points N et Q varient sur un cercle ζ' que l'on précisera.

Exercice N°03 (9 pts)

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et que pour tout $x\in]2,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{-8}{\left(\sqrt{x^2 4}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé .

2) a) Montrer que f realise une bijection de $]2,+\infty[$ sur lui même

b) Expliciter $f\circ f(x)$ pour $x\succ 2$. En déduire que la droite $\Delta : y=x$ est un axe de symétrie à ζ_f

3) Soit g la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{\cos x}\right)+\dfrac{1}{4} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{5}{4} & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) a) Montrer que $\forall\ x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $|g'(x)|\le\dfrac{2}{3}$

b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α

5) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases}U_0=\dfrac{\pi}{3}\\ U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{\pi}{3}\le U_n\le\dfrac{\pi}{2}$

b) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}$: $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ et en déduire que $\forall\ n\in\mathbb{N}$: $|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

c) Montrer que (U_n) est convergente et donner sa limite

6) On pose pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{2}g(x)$

a) Vérifier que $h(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sin x}$

b) Dresser le tableau de variation de h

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera

7) Soit la suite V définie par $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h^{-1}\left(\dfrac{-k}{n^2}\right)$

a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $h^{-1}\left(\dfrac{-1}{n}\right)\le V_n\le h^{-1}\left(\dfrac{-1}{n^2}\right)$

b) En déduire que V est convergente et déterminer sa limite

Exercice N°04 (5 pts)

Soit ABCD un rectangle direct de centre O tel que $AD = 2AB$, on désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AI]$ et $[BC]$ et D' le symétrique de I par rapport au point K.

1)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = I$ et $f(B) = D$.

b) Montrer que f est une symétrie glissante.

2) a) Montrer que $f(I) = K$

b) Donner alors la forme réduite de f.

c) Montrer que $f(K) = C$ et déterminer $f(D)$

3) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$

b) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle

c) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$.

d) Soit AIEF est un carré direct de centre G, Déterminer $g \circ g(A)$ et en déduire le centre de g.

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$.

Soient $M(z)$ et $M'(z')$, montrer que : $M' = g(M)$ si est seulement si $z' = iz + i$

Vers la victoire finale