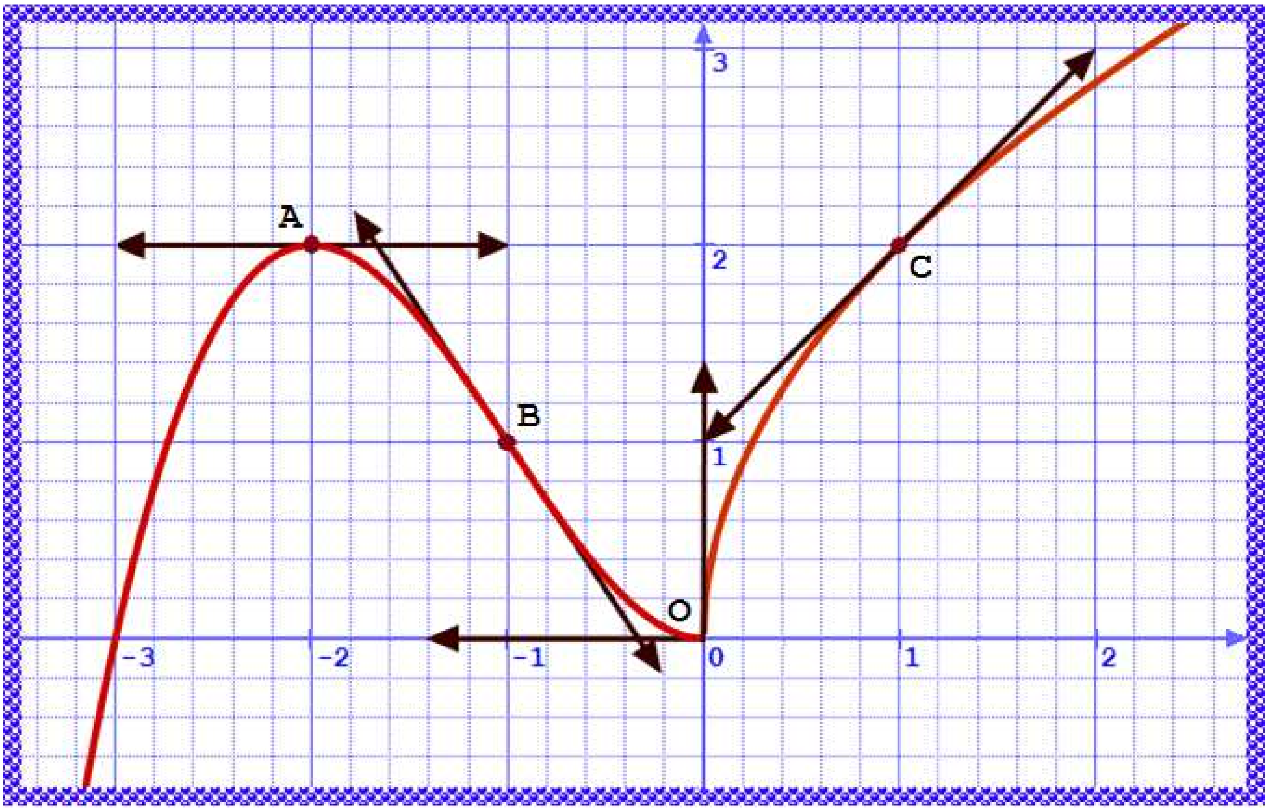
Epreuve	Devoir de synthèse n°I	Professeur
Mathématiques **Durée :** 2H	Classe : 4ème Décembre 2015	Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ *.*

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ *de la fonction f, dans un repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *, ainsi que les tangentes ou demi-tangentes aux points* O, A, B *et* C*.*



Répondre, par vrai ou faux à chacune des propositions données.

Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{f(x)-2}{x+2} = 0.$

2) $f\left(\left[-3,-1\right]\right) = \left[0,1\right].$

3) f *est dérivable sur l'intervalle* $\left[-3,0\right].$

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{f(x)} = +\infty.$

5) C est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}$.

6) $f'(-1) = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 2 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats trouvés.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]-\infty,0\right[$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

d) Drésser le tableau de variation de f.

e) Montrer que pour tout $x \in \left[1,+\infty\right]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $\left]0,+\infty\right[$, une solution unique α et que $\alpha \in \left]1,2\right[$.

4) Considérons le suite (U_n) défine sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 3 (8 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On pose $P(z) = z^3 - 2(2\cos\theta + i)z^2 + 4(1 + 2i\cos\theta)z - 8i$

1) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta + 4)$.

b) Achever alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les autres solutions tels que $Im(z_1) > 0$.

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par A, M_1 *et* M_2 *les points d'affixes respectives* z_0, z_1 *et* z_2.

a) *Vérifier que les points* A, M_1 *et* M_2 *appariennent à un même cercle de centre* O.

b) *Déterminer le réel* θ_0 *pour lequel* OAM_1M_2 *est un parallélogramme*
et vérifier que ce parallélogramme est un losange.

c) *Vérifier que pour* $\theta = \theta_0$, z_0, z_1 *et* z_2 *sont des racines sixièmes de* -64.

d) *Soient* I *et* J *les milieux respectifs des segments* $[OM_1]$ *et* $[AM_2]$.
Montrer que si θ *varie dans* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus \{\theta_0\}$, *la droite* (IJ) *reste parallèle à une direction fixe que l'on précisera.*

BON TRAVAIL

Correction du devoir de synthèse n°1 4ème 2015-2016

Exercice 1

$\boxed{1)\ Vrai}$: La courbe $\mathscr{C}$ admet, au point $B(-2,2)$, une tangente horizontale

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2)=0$

Or $f'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$ ce qui donne enfin $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-2}{x+2}=0$

$\boxed{2)\ Faux}$: $f\left(\left[-3,-1\right]\right)=\left[0,2\right]$.

$\boxed{3)\ Vrai}$: f est dérivable sur l'intervalle $\left[-3,0\right[$ et dérivable à gauche en 0 (demi tangente horizontale à gauche en O).

$\boxed{4)\ Faux}$: f dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_g(0)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0$ en plus sur l'intervalle $\left]-1,0\right[$ $\dfrac{f(x)}{x}<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0^-$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=-\infty$$

$\boxed{5)\ Faux}$: La courbe ne traverse pas sa tangente en C.

$\boxed{6)\ Faux}$: $f'(-1)=-\dfrac{3}{2}$

Exercice 2

1) $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{2}-\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\cancel{2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=1$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{2}-\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\cancel{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{\sqrt{1}}=-1$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-1$.

<u>Conclusion :</u> f dérivable à gauche et à droite en 0 mais $f'_g(0)\neq f'_d(0)$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

<u>Interprétation :</u> La courbe représentative de f admet, à gauche (resp. à droite), au point d'abscisse 0 une demi tangente de coefficient directeur 1 (resp. -1)

2) a) Si $x\in\left]0,+\infty\right[$ alors $f(x)=2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$Donc\ f'(x) = -\frac{1.\sqrt{x^2+1} - x.\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b) Si $x \in \left]-\infty,0\right[$ alors $f(x) = 2 - \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc

$$f'(x) = \frac{1.\sqrt{x^2+1} - x.\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

c) $$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} 2 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{|x|\to+\infty} 2 - \frac{\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2 - \frac{1}{1} = 1.$$

c – à – d $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$1 \Vert -1$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

e) $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2+1 \geq 2$ et $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2}$ donc $\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} \geq 2\sqrt{2}$

Ce qui conduit à : $0 < \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou encore $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) On pose $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in \left]0,+\infty\right[$. $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \left[1,2\right] \\ g(1)\times g(2) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} L'\text{équation } g(x)=0 \text{ admet au moins une} \\ \text{solution } \alpha \in \left]1,2\right[. \end{array}\right.$$

f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ donc g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $g'(x) = f'(x) - 1$.

Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $f'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ strictement décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$

Donc α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\left]0,+\infty\right[$.

4) a) <u>**Initialisation**</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ vrai.

<u>**Hérédité**</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

f est décroissante sur $\left[1,2\right]$ et $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(2) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \leq f(u_n) \leq f(1) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Or $2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \simeq 1.1 \geq 1$ et $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq 2$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) f est dérivable sur $\left[1,2\right]$ et $\forall x \in \left[1,2\right]$, $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

En plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[1,2\right]$ et aussi $\alpha \in \left[1,2\right]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis $\left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n - \alpha\right|$ ou encore $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n - \alpha\right|$.

c) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|2 - \alpha\right|$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0, \left|u_0 - \alpha\right| = \left|2 - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 \left|2 - \alpha\right| = \left|2 - \alpha\right|$. inégalité vraie

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|2 - \alpha\right|$ et montrons que

$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} \left|2 - \alpha\right|$

On a $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|2 - \alpha\right|$ donc $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} \left|2 - \alpha\right|$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|2 - \alpha\right|$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|2 - \alpha\right| = 0$ car $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \in \left]-1,1\right[$

Donc (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \alpha) + \alpha = \alpha$.

Exercice 3

1) $P(2i) = \left(2i\right)^3 - 2(2\cos\theta + i)\left(2i\right)^2 + 4(1 + 2i\cos\theta)\left(2i\right) - 8i$

$= 8i^3 + 8(2\cos\theta + i) + 8i(1 + 2i\cos\theta) - 8i = \cancel{-8i} + \cancel{16\cos\theta} + \cancel{8i} + \cancel{8i} - \cancel{16\cos\theta} \cancel{-8i} = 0$

donc z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta.z + 4) = z^3 - 4\cos\theta.z^2 + 4z - 2iz^2 + 8i\cos\theta.z - 8i$

$= z^3 - (4\cos\theta + 2i)z^2 + (4 + 8i\cos\theta)z - 8i$

$= z^3 - 2(2\cos\theta + i) + 4(1 + 2i\cos\theta)z - 8i = P(z)$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta.z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 2i = z_0$ ou $z^2 - 4\cos\theta.z + 4 = 0$ (1)

Résolution de l'équation (1) : $\Delta = 16\cos^2\theta - 16 = 16(\cos^2\theta - 1) = -16\sin^2\theta = \left(4i\sin\theta\right)^2$

Donc les solutions sont : $z' = \dfrac{4\cos\theta - 4i\sin\theta}{2} = 2\cos\theta - 2i\sin\theta = z_2$

et $z'' = \dfrac{4\cos\theta + 4i\sin\theta}{2} = 2\cos\theta + 2i\sin\theta = z_1$

$c)\ z_1 = 2\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = 2e^{i\theta}$ et $z_2 = 2\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = 2e^{-i\theta}$.

$3)\ a)\ OA = \left|2i\right| = 2\ ,\ OM_1 = \left|2e^{i\theta}\right| = 2\left|e^{i\theta}\right| = 2$ et $OM_2 = \left|2e^{-i\theta}\right| = 2\left|e^{-i\theta}\right| = 2$

$OA = OM_1 = OM_2 = 2 \Rightarrow O, M_1$ et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

$b)$ OAM_1M_2 est un parallèlogramme $\Leftrightarrow Aff(\overrightarrow{OA}) = Aff(\overrightarrow{M_2M_1}) \Leftrightarrow$

$Aff(\overrightarrow{OA}) = Aff(\overrightarrow{M_2M_1}) \Leftrightarrow 2i = 2\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \Leftrightarrow i = 2i\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2}$

et puisque $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\theta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} = \theta_0$.

En plus $OA = OM_2$ donc OAM_1M_2 est un losange.

$c)\ z_0^{\ 6} = (2i)^6 = 2^6 \times i^6 = 64 \times (i^2)^3 = 64(-1)^3 = -64$

$$z_1^{\ 6} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64 \quad \text{et} \quad z_2^{\ 6} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{-i\pi} = -64$$

Donc z_0, z_1 et z_2 sont des racines sixièmes de -64.

$d)\ I = O * M_1 \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_1}{2} = e^{i\theta}$ et $J = A * M_2 \Leftrightarrow z_J = \dfrac{2i + 2e^{-i\theta}}{2} = i + e^{-i\theta}$

$Aff(\overrightarrow{IJ}) = z_J - z_I = i + e^{-i\theta} - e^{i\theta} = i - \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = i - 2i\sin\theta = i\left(1 - 2\sin\theta\right)$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \left(1 - 2\sin\theta\right)\vec{j}$ c-à-d $(IJ) \parallel (O, \vec{j})$ pour tout réel $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

تم بعون اللّه

آرائكم و انتقاداتكم مرحب بها