



### Exercice 3 (8pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, 2]$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche de 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]1, 2[$  et prouver que pour tout  $x \in ]1, 2[$  ;  $f'(x) < 0$ .

2)a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, 2]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

c) On désigne par (C') la courbe représentative de  $f^{-1}$ , tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') et préciser les branches infinies.

3)a) Montrer que pour tout  $x \in J$  ;  $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

b) Montrer que l'équation :  $f(x) = x$  admet dans  $]1, 2]$  une unique solution  $\alpha$ .

4) Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $1 \leq u_n \leq 2$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in [1, 2]$  ;  $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ .

d) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.